Б·П·吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（三）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（三）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　21.375印张　453千字

1979年11月第1版　1983年8月第3次印刷

印数：131,601—168,200

书号13195·19　定价2.25元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　录

第三章　不定积分

§1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念　若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中C为任意常数.

2° 不定积分的基本性质：

(a) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$；(б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$；

(в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$　（A＝常数）；

(г) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3° 最简积分表：

Ⅰ. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$　$(n \neq -1)$；

Ⅱ. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$　$(x \neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

Ⅳ. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$;

Ⅴ. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C;\end{cases}$

Ⅵ. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C$;

Ⅶ. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq1)$; $\int e^x dx=e^x+C$;

Ⅷ. $\int\sin x dx=-\cos x+C$;

Ⅸ. $\int\cos x dx=\sin x+C$;

Ⅹ. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$;

Ⅺ. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$;

Ⅻ. $\int\operatorname{sh}x dx=\operatorname{ch}x+C$;

XⅢ. $\int\operatorname{ch}x dx=\operatorname{sh}x+C$;

XⅣ. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C$;

XⅤ. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C$.

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则 $$\int f(u)du = F(u) + C,\ \text{式中}u = \varphi(x).$$

（б）分项积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则 $$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

（в）代入法 假设

$x = \varphi(t)$，式中$\varphi(t)$及其导函数$\varphi'(t)$为连续的，

则得 $$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

（г）分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数，

则 $$\int u dv = uv - \int v du.$$

利用最简积分表，求出下列积分*：

1628. $\int (3 - x^2)^3 dx.$

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中，凡出现的函数，无论是被积函数还是原函数，均默认是在有意义的定义域上进行的。例如最简积分表中Ⅰ里当 $n \leqslant -2$ 时，要求 $x \neq 0$；Ⅳ中要求 $|x| \neq 1$；Ⅴ中要求 $|x| < 1$；以及Ⅵ中，当取负号时要求 $|x| > 1$；等等，就未加声明。在题解中也有相当多的类似情况。因此，如无特别声明，在一般情形下，这些定义域是很容易被读者确定的，此处就不再予以一一指明。——题解编者注。

解 $\int(3-x^2)^3dx=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)dx$

$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C$。

1629. $\int x^2(5-x)^4dx$.

解 $\int x^2(5-x)^4dx$

$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$

$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C$。

1630. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$.

解 $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$

$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)dx$

$=x-3x^2+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C$。

1631. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$.

解 $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx$

$=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$。

1632. $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$.

解 $\int\left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx=a\ln|x|-\frac{a^2}{x}-\frac{a^3}{2x^2}+C$。

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx$

$= \frac{2}{3} x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$.

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

解 $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

$= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right) dx$

$= \frac{4}{5} x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17} x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$.

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right) dx$

$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C$.

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$.

解 $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\, dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{5}{4}}\right) dx$

$$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$$

1637. $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$

解 $\int\frac{(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$

$$=\int\left(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$$

$$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$$

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$$

1639. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

1640. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$$=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

1641. $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

解 $\int\frac{x^2+3}{x^2-1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$

$$=x+2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

1642. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$=\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1643. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx$.

解 $\int(2^x+3^x)^2dx=\int(4^x+2\cdot6^x+9^x)dx$

$=\frac{4^x}{\ln4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+C$.

1645. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

解 $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$=-\frac{2}{\ln5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{1}{5\ln2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C$.

1646. $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

解 $\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$.

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx=x-\cos x+\sin x+C$.

1648. $\int\sqrt{1-\sin2x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=\int\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx$

$=\int[sgn(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\cdot sgn(\cos x-\sin x)+C.$

1649. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{ctg}^2 x dx=\int(\csc^2 x-1)dx=-\mathrm{ctg}x-x+C.$

1650. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{tg}^2 x dx=\int(\sec^2 x-1)dx=\mathrm{tg}x-x+C.$

1651. $\int(a\,\mathrm{sh}x+b\,\mathrm{ch}x)dx.$

解 $\int(a\,\mathrm{sh}x+b\,\mathrm{ch}x)dx=a\,\mathrm{ch}x+b\,\mathrm{sh}x+C.$

1652. $\int \mathrm{th}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{th}^2 x dx=\int\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx=x-\mathrm{th}x+C.$

1653. $\int \mathrm{cth}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{cth}^2 x dx=\int\left(1+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)dx=x-\mathrm{cth}x+C.$

1654. 证明：若

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$$

证 由$\int f(x)dx=F(x)+C$得知$F'(x)=f(x)$，因而有$F'(ax+b)=f(ax+b)$， 且$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]$

$=F'(ax+b)$，于是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]=f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

求出下列积分：

1655. $\int\frac{dx}{x+a}$.

解 $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C$.

1656. $\int(2x-3)^{10}dx$.

解 $\int(2x-3)^{10}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}(2x-3)^{11}+C$

$=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C$.

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx$.

解 $\int\sqrt[3]{1-3x}\,dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$

$=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$.

1658. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}} = -\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}} + C$

$= -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C$.

1659. $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}$.

解 $\int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}} + C$

$= -\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}} + C$.

1660+*. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$.

解 $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}}dx$

$= -\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2} + C$.

---

* 题号右上角带"+"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的。俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

1661. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2+3x^2}=\int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$.

1662. $\int \frac{dx}{2-3x^2}$.

解 $\int \frac{dx}{2-3x^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C$.

1663. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C$.

1664. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ln\left|x\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}x^2-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2-2}|+C.$$

1665. $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx$.

解 $\int(e^{-x}+e^{-2x})dx=-(e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x})+C$.

1666. $\int(\sin 5x-\sin 5a)dx$.

解 $\int(\sin 5x-\sin 5a)\,dx=-\frac{1}{5}\cos 5x-x\sin 5a+C$.

1667. $\int\frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+C$.

1668. $\int\frac{dx}{1+\cos x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C$.

1669. $\int\frac{dx}{1-\cos x}$.

解 $\int\frac{dx}{1-\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+C$.

1670. $\int\frac{dx}{1+\sin x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

$=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$.

1671. $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$.

解 $\int[\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx$

$=\frac{1}{2}[\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C$.

1672. $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=2\operatorname{th}\frac{x}{2}+C$.

1673. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}=-2\operatorname{cth}\frac{x}{2}+C$.

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分：

1674. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int\frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}+C.$

1675. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx.$

解 $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int(1+x^3)^{\frac{1}{3}}d(1+x^3)$

$=\frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C.$

1676. $\int\frac{xdx}{3-2x^2}.$

解 $\int\frac{xdx}{3-2x^2}=-\frac{1}{4}\int\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2}$

$=-\frac{1}{4}\ln|3-2x^2|+C.$

1677. $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}.$

解 $\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

$=-\frac{1}{2(1+x^2)}+C.$

1678. $\int\frac{xdx}{4+x^4}.$

解 $\int\frac{xdx}{4+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2}=\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{2}+C.$

1679. $\int\frac{x^3dx}{x^8-2}.$

解 $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}$

$= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

1680. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2\int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$

$= 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C.$

1681. $\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$.

解 $\int \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = -\int \sin\frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C.$

1682. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{1}{|x|}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) + C$

$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$

1683. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

$= -\int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$

1684. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x\, dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$

$= -\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x\, d\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$= \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

1685. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\, d(x^2-1)$

$= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.$

1686. $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}$.

解 $\int \frac{x^2\,dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{24}\int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27)$

$$=\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}+C.$$

1687. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$.

解 由$x(1+x)>0$知：$x>0$或$x<-1$.

当$x>0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}$$

$$=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C;$$

当$x<-1$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=-\int\frac{d[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}}$$

$$=-2\int\frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}}$$

$$=-2\ln(\sqrt{-x}+\sqrt{-(1+x)})+C.$$

总之，得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\cdot\ln(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|})+C.$$

1688. $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

解 由 $x(1-x)>0$知：$0<x<1$.于是，得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

1689. $\int xe^{-x^2}dx$.

解 $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C.$$

1690. $\int\frac{e^x dx}{2+e^x}$.

解 $\int\frac{e^x dx}{2+e^x}=\int\frac{d(2+e^x)}{2+e^x}=\ln(2+e^x)+C.$

1691. $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

解 $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}=\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C.$

1692. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}}$

$$=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C.$$

1693. $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.

解 $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx=\int\ln^2 x\,d(\ln x)=\frac{1}{3}\ln^3 x+C.$

1694. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

解 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x\ln(\ln x)}$

$= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln|\ln(\ln x)| + C$.

1695. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

解 $\int \sin^6 x\cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C$.

1696. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$.

解 $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx = -\int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x)$

$= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$.

1697. $\int \operatorname{tg} x dx$.

解 $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}$

$= -\ln|\cos x| + C$.

1698. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$

$= \ln|\sin x| + C$.

1699. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.

解 $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

$=\int (\sin x-\cos x)^{-\frac{1}{3}}d(\sin x-\cos x)$

$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\sin x-\cos x)^2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{1-\sin 2x}+C$.

1700. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$.

解 当$|a|=|b|\neq 0$时，

$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$

$=\frac{1}{|a|}\int \sin x\cos x dx=\frac{1}{2|a|}\sin^2 x+C$;

当$|a|\neq|b|$时，

$\int \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}dx$

$=\frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}}$

$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 x+b^2}+C$

$=\frac{\sqrt{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}}{a^2-b^2}+C$.

1701. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}} = -\int (\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{4}} d(\operatorname{ctg} x)$

$= -\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x} + C$.

1702. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 2} dx$

$= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

1703. $\int \frac{dx}{\sin x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx$

$= \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$.

1704. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

解 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

1705. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x} = \int \frac{\frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{th}\frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}$

$= \ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + C.$

1706. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2\int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2}$

$= 2\operatorname{arc\,tg}(e^x) + C.$

1707. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx.$

解 因为

$\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x = (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x)^2 - 2\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x$

$= \operatorname{ch}^2 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sh}^2 2x = \frac{1+\operatorname{ch}^2 2x}{2},$

所以，得

$$\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}}dx = \int \frac{\frac{1}{4}d\,(\operatorname{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(\operatorname{ch}2x+\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 2x})+C_1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{sh}^4 x+\operatorname{ch}^4 x}\right)+C.$$

1708. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x\cdot\sqrt[3]{\operatorname{th}^2 x}} = \int (\operatorname{th}x)^{-\frac{2}{3}}d(\operatorname{th}x)$

$=3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C.$

1709. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx$.

解 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arc\,tg}x\,d(\operatorname{arc\,tg}x)$

$=\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg}x)^2+C.$

1710. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2}$

$=-\frac{1}{\arcsin x}+C.$

1711. $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$.

解 $\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

$=\int[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{1}{2}}d[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]$

$=\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})+C$.

1712. $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 $\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C$.

1713. $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)+C$.

1714⁺. $\int\frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}$.

解 $\int \frac{x^{14}dx}{(x^5+1)^4}=\int \frac{x^{14}dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4}$

$=-\frac{1}{5}\int (1+x^{-5})^{-4}d(1+x^{-5})$

$=\frac{1}{15}(1+x^{-5})^{-3}+C_1=\frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3}+C_1$

$=\frac{(x^5+1)^3-3x^{10}-3x^5-1}{15(x^5+1)^3}+C_1$

$=-\frac{3x^{10}+3x^5+1}{15(x^5+1)^3}+C.$

1715. $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$

解 当$n=-2$时，

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\int \frac{dx}{x\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|x|+C;$$

当$n\neq-2$时，

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}}dx=\frac{2}{n+2}\int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{n+2}\ln\left(x^{\frac{n+2}{2}}+\sqrt{1+x^{n+2}}\right)+C.$$

1716⁺. $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解 $\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)$

$=\frac{1}{4}\ln^2\frac{1+x}{1-x}+C$.

1717. $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$.

解 $\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}=\int\frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc }\sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)+C$.

1718. $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$.

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\sin 2x dx}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}$

$=-\frac{1}{4}\int\frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}}=-\frac{1}{2}\text{arc tg}(\cos 2x)+C$.

1719. $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$.

解 $\int\frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx=\int\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}dx$

$$=\frac{1}{\ln 3-\ln 2}\int\frac{d\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2-1}$$

$$=\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C.$$

1720. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}=\int\frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$=2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

用分项积分法计算下列积分:

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2dx$.

解 $\int x^2(2-3x^2)^2dx=\int(4x^2-12x^4+9x^6)dx$

$$=\frac{4}{3}x^3-\frac{12}{5}x^5+\frac{9}{7}x^7+C.$$

1722. $\int\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int\frac{1+x}{1-x}dx=\int\left(-1+\frac{2}{1-x}\right)dx$

$$=-x-2\ln|1-x|+C.$$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x} dx$.

解 $\int \frac{x^2}{1+x} dx = \int \left(x-1+\frac{1}{1+x}\right) dx$

$= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C$.

1724. $\int \frac{x^3}{3+x} dx$.

解 $\int \frac{x^3}{3+x} dx = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x}\right) dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C$.

1725. $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

$= x + \ln(1+x^2) + C$.

1726. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx$.

解 $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx = \int \frac{(x^2-2)-4x+6}{2-x^2} dx$

$= \int \left(-1 - \frac{4x}{2-x^2} + \frac{6}{2-x^2}\right) dx$

$= -x + 2\ln|2-x^2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x}\right| + C$.

1727. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$.

解 $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx = \int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}}dx$

$=\int\left[(1-x)^{-98}-2(1-x)^{-99}+(1-x)^{-100}\right]dx$

$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C$.

1728. $\int \frac{x^5}{x+1}dx$.

解 $\int \frac{x^5}{x+1}dx=\int\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C$.

1729. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

$=\int \frac{1}{2}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$

$=\frac{1}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]+C$.

1730. $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$.

解 $\int x\sqrt{2-5x}\,dx$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)+\frac{2}{5}\right](2-5x)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int\left[-\frac{1}{5}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}(2-5x)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=-\frac{8+30x}{375}(2-5x)^{\frac{3}{2}}+C。$$

1731. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}$.

解 $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}=-\frac{1}{3}\int\frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}}dx$

$$=-\frac{1}{3}\int\left[(1-3x)^{\frac{2}{3}}-(1-3x)^{-\frac{1}{3}}\right]dx$$

$$=\frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C$$

$$=-\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}}+C。$$

1732. $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

解 $\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int[(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}}d(1+x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[(1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right]d(1+x^2)$$

$$=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=\frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1733. $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

1734. $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 $\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1735. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}=\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)dx$

$$=\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

1736. $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2}-\frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$=\frac{1}{10\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$.

1737. $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x+2)(x+3)}=\int\left(\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)dx$

$=\ln\frac{|x+3|^3}{(x+2)^2}+C$.

1738. $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.

解 $\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)}$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)d(x^2)$

$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C$.

1739. $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}\quad(a\neq b)$.

解 $\int\frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2}$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\int\left[\frac{1}{(x+a)^2}+\frac{1}{(x+b)^2}-\frac{2}{(x+a)(x+b)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)-\frac{2}{(a-b)^2}\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$=-\frac{2x+a+b}{(a-b)^2(x+a)(x+b)}+\frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C.$$

1740. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ $(|a|\neq|b|)$.

解 $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\int\left(\frac{1}{x^2+b^2}-\frac{1}{x^2+a^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{b}-\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right)+C.$$

1741. $\int\sin^2xdx$.

解 $\int\sin^2xdx=\int\frac{1-\cos2x}{2}dx$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin2x+C.$$

1742. $\int\cos^2xdx$.

解 $\int\cos^2xdx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

1743. $\int \sin x\cdot\sin(x+a)\,dx.$

解 $\int \sin x\cdot\sin(x+a)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int[\cos a-\cos(2x+a)]dx$$

$$=\frac{x}{2}\cos a-\frac{1}{4}\sin(2x+a)+C.$$

1744. $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx.$

解 $\int \sin 3x\cdot\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)dx$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C.$$

1745. $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx.$

解 $\int \cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{5x}{6}+\cos\frac{x}{6}\right)dx$

$$=\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+3\sin\frac{x}{6}+C.$$

1746. $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx.$

解 $\int \sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)\right]dx$$

$$=-\frac{1}{10}\cos\left(5x+\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+C.$$

1747. $\int\sin^3 x dx$.

解 $\int\sin^3 x dx=\int(\cos^2 x-1)d(\cos x)$

$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

1748. $\int\cos^3 x dx$.

解 $\int\cos^3 x dx=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$$

1749. $\int\sin^4 x dx$.

解 $\int\sin^4 x dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int(3-4\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

1750. $\int \cos^4 x dx$。

解 $\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$

$= \frac{1}{8}\int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$。

1751. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$。

解 $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = -\mathrm{ctg} x - x + C$。

1752. $\int \mathrm{tg}^3 x dx$。

解 $\int \mathrm{tg}^3 x dx = \int \mathrm{tg} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx$

$= \int \mathrm{tg} x d(\mathrm{tg} x) - \int \mathrm{tg} x dx$

$= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C$,

其中第二个积分见1697题。

1753. $\int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx$。

解 因为

$\sin^2 3x \cdot \sin^3 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \cdot \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x)$

$$=\frac{1}{8}(3\sin 2x-3\cos 6x\cdot\sin 2x-\sin 6x+\sin 6x\cdot\cos 6x)$$

$$=\frac{3}{8}\sin 2x+\frac{3}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 8x+\frac{1}{16}\sin 12x$$

所以，得

$$\int\sin^2 3x\cdot\sin^3 2x dx=-\frac{3}{16}\cos 2x-\frac{3}{64}\cos 4x$$

$$+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{3}{128}\cos 8x-\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$

1754. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

$=-\mathrm{ctg}x+\mathrm{tg}x+C.$

1755. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos x}=\int\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$

$$=\int\frac{dx}{\cos x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\frac{1}{\sin x}+C,$$

其中第一个积分见1704题。

1756. $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x\cdot\cos^3 x}=\int\left(\frac{\sin x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)dx$

$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+\int\frac{d(2x)}{\sin 2x}$

$=\frac{1}{2\cos^2 x}+\ln|\operatorname{tg}x|+C$,

其中第二个积分见1703题。

1757. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx$.

解 $\int\frac{\cos^3 x}{\sin x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\cos x dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)d(\sin x)$

$=\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\sin^2 x+C$.

1758. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\sec^2 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(1+\operatorname{tg}^2 x)d(\operatorname{tg}x)$

$=\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+C$,

1759. $\int\frac{dx}{1+e^x}$.

解 $\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=x-\ln(1+e^x)+C.$

1760. $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx.$

解 $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx=\int\left(1+\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\right)dx$

$=x+2\operatorname{arc\,tg}(e^x)+C.$

1761. $\int\operatorname{sh}^2 x dx.$

解 $\int\operatorname{sh}^2 x dx=\int\frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x-\frac{x}{2}+C.$

1762. $\int\operatorname{ch}^2 x dx.$

解 $\int\operatorname{ch}^2 x dx=\int\frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}dx=\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+\frac{x}{2}+C.$

1763. $\int\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}2x dx.$

解 $\int\operatorname{sh}x\cdot\operatorname{sh}2x dx=2\int\operatorname{sh}^2 x\operatorname{ch}x dx=2\int\operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh}x)$

$=\frac{2}{3}\operatorname{sh}^3 x+C.$

1764. $\int\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}3x dx.$

解 $\int\operatorname{ch}x\cdot\operatorname{ch}3x dx=\frac{1}{2}\int(\operatorname{ch}4x+\operatorname{ch}2x)dx$

$$=\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x+C.$$

1765. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x\cdot\operatorname{ch}^2x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2x\cdot\operatorname{ch}^2x}=\int\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2x}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}\right)dx$$

$$=-(\operatorname{cth}x+\operatorname{th}x)+C.$$

用适当的代换，求下列积分：

1766. $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

解 设 $1-x=t$，则 $x=1-t$，$dx=-dt$，故得

$$\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx=-\int(1-t)^2t^{\frac{1}{3}}dt$$

$$=-\int\left(t^{\frac{1}{3}}-2t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{7}{3}}\right)dt$$

$$=-\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}t^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{140}(9+12x+14x^2)(1-x)^{\frac{4}{3}}+C.$$

1767. $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$.

解 设 $1-5x^2=t$，则 $x^2=\frac{1}{5}(1-t)$，从而 x^3dx

$$=\frac{1}{2}x^2d(x^2)=\frac{1}{10}(1-t)\left(-\frac{1}{5}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{50}(1-t)dt,$$ 故得

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}dx=-\frac{1}{50}\int(t^{10}-t^{11})dt$$

$$=-\frac{1}{550}t^{11}+\frac{1}{600}t^{12}+C$$

$$=-\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11}+C.$$

1768. $\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$

解 设$2-x=t$，则$x=2-t$，$dx=-dt$，故得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx=-\int t^{-\frac{1}{2}}(2-t)^2dt$$

$$=-\int\left(4t^{-\frac{1}{2}}-4t^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$=-8t^{\frac{1}{2}}+\frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C$$

$$=-\frac{2}{15}(32+8x+3x^2)\sqrt{2-x}+C.$$

1769. $\int\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 设$1-x^2=t$，则$x^2=1-t$，从而$x^5dx=\frac{1}{2}(x^2)^2$

$$\cdot d(x^2)=-\frac{1}{2}(1-t)^2dt,$$ 故得

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2 dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right)dt$$

$$= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C.$$

1770. $\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx$.

解 设$2-5x^3=t$，则$x^3=\frac{1}{5}(2-t)$，从而

$$x^5dx = \frac{1}{3}x^3d(x^3) = -\frac{1}{75}(2-t)dt,$$

故得

$$\int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}}dx = -\frac{1}{75}\int t^{\frac{2}{3}}(2-t)dt$$

$$= -\frac{1}{75}\int\left(2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}}\right)dt = -\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}} + C$$

$$= -\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$$

1771⁺. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$.

解 设$\sin x = t$，则$\cos^5 x dx = (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$
$=(1-t^2)^2dt$，

故得

$$\int \cos^6 x\sqrt{\sin x}dx=\int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-2t^{\frac{5}{2}}+t^{\frac{9}{2}}\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{7}t^{\frac{7}{2}}+\frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}}+C$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C.$$

1772. $\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$

解 设$\cos^2 x=t$，则$\sin x\cos x dx=-\frac{1}{2}dt$，故得

$$\int\frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{t}{1+t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln(1+t)+C$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x)+C.$$

1773. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx.$

解 设 $\mathrm{tg}x=t$，则$\frac{1}{\cos^4 x}dx=(1+t^2)dt$，故得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int(t^4+t^2)dt=\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+C.$$

1774. $\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

解 设$1+\ln x=t$，则$\frac{\ln x dx}{x}=(1+\ln x-1)d(1+\ln x)$

$=(t-1)dt$，故得

$$\int\frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int t^{-\frac{1}{2}}(t-1)dt$$

$$=\int\left(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+C.$$

1775. $\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}$.

解 设$e^{\frac{x}{2}}=t$，则$e^x=t^2$，$dx=\frac{2dt}{t}$，故得

$$\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x}=2\int\frac{dt}{t^2(1+t)}=2\int\left(\frac{1-t}{t^2}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=-\frac{2}{t}-2\ln t+2\ln(1+t)+C$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}-x+2\ln(1+e^{\frac{x}{2}})+C.$$

1776. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解 设$\sqrt{1+e^x}=t$,则$x=\ln(t^2-1)$, $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$,

故得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+C$$

$$=\ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)+C=x-2\ln(1+\sqrt{1+e^x})+C.$$

1777. $\int\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}$.

解 设$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}=t$,则$dt=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, 故得

$$\int\frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{1+x}=2\int t\,dt=t^2+C$$

$$=(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x})^2+C.$$

运用三角的代换$x=a\sin t$, $x=a\operatorname{tg}t$, $x=a\sin^2t$等等，求下列积分（参数为正的）：

1778. $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 由于被积函数的存在域为$-1<x<1$，因此可设

$x=\sin t$, 并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.从而

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=\cos^3t,\quad dx=\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{dt}{\cos^2 t}=\operatorname{tg} t+C$$

$$=\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

1779. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-2}}$.

解 被积函数的存在域为$x>\sqrt{2}$及$x<-\sqrt{2}$，分别考虑。

（1）当$x>\sqrt{2}$时，可设$x=\sqrt{2}\sec t$，并限制$0<t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{2\sec^2 t}{\sqrt{2}\operatorname{tg} t},\quad dx=\sqrt{2}\sec t\cdot\operatorname{tg} t\, dt.$$

代入得

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}=2\int \sec^3 t dt=2\int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)^2 d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2}-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2}+\int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\sin t}-\frac{1}{1+\sin t}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)+C_1$$

$$=\operatorname{tg} t\cdot\sec t+\ln(\sec t+\operatorname{tg} t)+C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln(x+\sqrt{x^2-2})+C.$$

（2）当$x<-\sqrt{2}$时，仍设$x=\sqrt{2}\sec t$，但限制$\pi<t<\frac{3\pi}{2}$。其余步骤与上相同，注意到，此时$\sec t+\operatorname{tg} t<0$，因此在对数符号里要加绝对值，即结果为

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

总之，当$|x|>\sqrt{2}$时，

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln|x+\sqrt{x^2-2}|+C.$$

1780. $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$.

解 被积函数的存在域为$-a\leqslant x\leqslant a$，因此设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$。从而

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t,\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=a^2\int\cos^2 t dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\overset{*)}{+}C$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

*) 利用1742题的结果。

1781. $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此可设$x=a\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$.从而

$$(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}=a^3\sec^3 t,\quad dx=a\sec^2 t dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^2}\int\cos t\,dt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\operatorname{tg}t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C.$$

1782. $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx.$

解 被积函数的存在域为$-a\leqslant x<a$，因此可设$x=a\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}}=\frac{1+\sin t}{\cos t},\quad dx=a\cos t dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx=a\int(1+\sin t)dt=a(t-\cos t)+C$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C\quad(-a<x<a).$$

注意，上式在端点$x=-a$也成立。即函数$F(x)=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$在点$x=-a$的（右）导数等于

被积函数$f(x)=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$在点$x=-a$之值。事实上，

由于$F(x)$和$f(x)$都在$-a\leqslant x<a$连续，且$F'(x)=f(x)$在$-a<x<a$成立。故由中值定理，知当$-a<x<a$时，有

$$\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}=F'(\xi)=f(\xi),\quad -a<\xi<x.$$

由此可知，（右）导数

$$F'(-a)=\lim_{x\to-a+0}\frac{F(x)-F(-a)}{x+a}$$

$$=\lim_{\xi\to-a+0}f(\xi)=f(-a).$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论，从略。

1783. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$.

解 被积函数的存在域为$0\leqslant x<2a$，因此可设$x=2a\sin^2 t$，并限制$0\leqslant t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=\frac{2a\sin^3 t}{\cos t},\ dx=4a\sin t\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=8a^2\int\sin^4 t\,dt$$

$$=8a^2\left(\frac{3}{8}t-\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{32}\sin 4t\right)^{*)}+C.$$

注意到 $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sqrt{\frac{x}{2a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x}{2a}}=\frac{1}{a}\cdot\sqrt{x(2a-x)}$ 及 $\sin 4t=2\sin 2t\cos 2t=4\sin t\cos t(1-2\sin^2 t)=\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$，最后得

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}$$

$$-2a^2\cdot\frac{1}{a}\sqrt{x(2a-x)}+\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C.$$

*）　利用1749题的结果。

1784. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

解　不妨设 $a<b$。被积函数的存在域为 $a<x<b$，因此可设 $x-a=(b-a)\sin^2 t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$。从而

$$\sqrt{(x-a)(b-x)}=(b-a)\sin t\cos t,$$

$$dx=2(b-a)\sin t\cos t\,dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int dt=2t+C$$

$$=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C.$$

1785. $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$。

解 与上题相同，作同一代换，并注意到$\sin4t=4\sin t$

$\cdot\cos t(1-2\sin^2t)=4\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\cdot\sqrt{1-\frac{x-a}{b-a}}\left(1-2\cdot\frac{x-a}{b-a}\right)$

$=-4\cdot\frac{2x-(a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x-a)(b-x)}$，即得

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx=2(b-a)^2\int\sin^2t\cos^2tdt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int\sin^22tdt=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos4t)dt$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\left(t-\frac{1}{4}\sin4t\right)+C$$

$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$$

$$+\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+C。$$

用双曲线代换$x=a\operatorname{sh}t$，$x=a\operatorname{ch}t$等等，求下列积分(参数为正的)：

1786. $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$。

解 被积函数的存在域为$-\infty<x<+\infty$，因此可设$x=a\operatorname{sh}t$。从而

$$\sqrt{a^2+x^2}=a\operatorname{ch}t,\quad dx=a\operatorname{ch}tdt,$$

代入得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=a^2\int \mathrm{ch}^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{sh}\,2t\right)\overset{*)}{+}C_1.$$

注意到 $x+\sqrt{a^2+x^2}=a\ (\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)\ =ae^t$，即 $t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$ 及 $\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t\ \mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2}$，

最后得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$$

$$+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+C.$$

*)　利用1762题的结果。

1787. $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx.$

解　与上题相同，设 $x=a\mathrm{sh}t$，则

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a\mathrm{sh}^2t}{\mathrm{ch}t};\ dx=a\mathrm{ch}t\ dt.$$

代入得

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=a^2\int\mathrm{sh}^2 t dt$$

$$=a^2\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}2t-\frac{t}{2}\right)\overset{*)}{+}C_1$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

*) 利用1761题的结果。

1788+. $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx.$

解 被积函数的存在域为$x\geqslant a$及$x<-a$。

(1)当$x>a$时，可设$x=a\operatorname{ch}t$，并限制$t>0$。从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t-1}{\operatorname{sh}t},\quad dx=a\operatorname{sh}t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=a\int(\operatorname{ch}t-1)dt$$

$$=a\operatorname{sh}t-at+C_1=a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-1}-at+C_1$$

$$=a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}+\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+x)+C_2$$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a})+C.$$

(2) 当$x<-a$时，可设$x=-a\operatorname{ch}t$，并限制$t>0$。从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}=\frac{\operatorname{ch}t+1}{\operatorname{sh}t},\quad dx=-a\operatorname{sh}t\,dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=-a\int(\text{ch}t+1)dt=-a\,\text{sh}t-at+C_1$$

$$=-a\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}-\frac{x}{a}\right)+C_1$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x)+C_2$$

$$=-\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a})+C.$$

总之，当$|x|>a$时，

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx=\text{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-a^2}$$

$$-2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|})+C.$$

1789. $\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$.

解 不妨设$a<b$。被积函数的存在域为$x>-a$及$x<-b$。

(1) 当$x>-a$时，可设$x+a=(b-a)\,\text{sh}^2t$，并限制$t>0$，从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\text{sh}t\,\text{ch}t,\quad dx=2(b-a)\text{sh}t\,\text{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}=2\int dt=2t+C_1.$$

注意到$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=\sqrt{b-a}(\text{sh}t+\text{ch}t)=\sqrt{b-a}\,e^t$，就有$t=\ln\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$，最后得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C.$$

（2）当$x<-b$时，可设$x+b=(a-b)\mathrm{sh}^2t$，并限制$t>0$. 从而

$$\sqrt{(x+a)(x+b)}=(b-a)\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t,\quad dx$$
$$=-(b-a)2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t\,dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = -2\int dt = -2t+C_1$$
$$=-2\ln(\sqrt{-(x+a)}+\sqrt{-(x+b)})+C.$$

总之，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$$
$$=\begin{cases} 2\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}), & \text{若}x+a>0\text{及}x+b>0; \\ -2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}), & \text{若}x+a<0\text{及}x+b<0. \end{cases}$$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx.$

解 与上题相同，作同一代换，只是在求积分的过程中变动个别地方。今以$x>-a$时为例，解法如下：

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,dx = 2(b-a)^2\int \mathrm{sh}^2t\,\mathrm{ch}^2t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}(b-a)^2\int \mathrm{sh}^2 2t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\int (\mathrm{ch}4t-1)\,dt$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh}4t-t\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2[\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t(1+2\operatorname{sh}^2t)-t]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}(b-a)^2\left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}}\cdot\sqrt{1+\frac{x+a}{b-a}}\left(1+2\cdot\frac{x+a}{b-a}\right)\right.$$

$$\left.-\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})\right]+C$$

$$=\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}$$

$$-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C。$$

至于当$x<-b$时，与上题类似，只是将结果改成 $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C$，此处不再写出解法步骤。

总之，

$$\int\sqrt{(x+a)(x+b)}dx$$

$$=\begin{cases}\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b})+C, & \text{若}x+a>0\text{及}x+b>0; \\ \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}+\frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b})+C, & \text{若}x+a<0\text{及}x+b<0。\end{cases}$$

用分部积分法，求下列积分：

1791. $\int \ln x dx$.

解 $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C$.

1792. $\int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1)$.

解 $\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x$

$$- \frac{1}{n+1}\int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

1793. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$.

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx = -\int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\int \ln x d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x - \frac{2}{x}\ln x$$

$$+ 2\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$$

1794. $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.

解 $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx = \frac{2}{3}\int \ln^2 x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{4}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\ln x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}\int \ln x d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x-\frac{8}{9}x^{\frac{3}{2}}\ln x+\frac{8}{9}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C.$$

1795. $\int xe^{-x}dx$.

解 $\int xe^{-x}dx=-\int xd(e^{-x})=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx$

$$=-e^{-x}(x+1)+C.$$

1796. $\int x^2e^{-2x}dx$.

解 $\int x^2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int x^2d(e^{-2x})$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}\cdot 2xdx$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}\int xd(e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}x^2e^{-2x}-\frac{1}{2}xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

1797. $\int x^3 e^{-x^2}dx$.

解 $\int x^3 e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(e^{-x^2})$

$= -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(x^2) = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C$.

1798. $\int x\cos x dx$.

解 $\int x\cos x dx = \int x d(\sin x)$

$= x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

1799. $\int x^2\sin 2x dx$.

解 $\int x^2 \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\int x^2 d(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}\int x d(\sin 2x)$

$= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$

$= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C$.

1800. $\int x\operatorname{sh} x dx$.

解 $\int x\operatorname{sh} x dx = \int x d(\operatorname{ch} x)$

$= x\operatorname{ch} x - \int \operatorname{ch} x dx = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$.

1801. $\int x^3 \mathrm{ch} 3x dx$.

解 $\int x^3 \mathrm{ch} 3x dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(\mathrm{sh} 3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \mathrm{sh} 3x - \int x^2 \mathrm{sh} 3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \mathrm{sh} 3x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\mathrm{ch} 3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \mathrm{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \mathrm{ch} 3x + \frac{2}{3}\int x \mathrm{ch} 3x dx$

$= \frac{1}{3}x^3 \mathrm{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \mathrm{ch} 3x + \frac{2}{9}\int x d(\mathrm{sh} 3x)$

$= \frac{1}{3}x^3 \mathrm{sh} 3x - \frac{1}{3}x^2 \mathrm{ch} 3x + \frac{2}{9}x \mathrm{sh} 3x - \frac{2}{9}\int \mathrm{sh} 3x dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\mathrm{sh} 3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right)\mathrm{ch} 3x + C$.

1802. $\int \mathrm{arc\,tg} x dx$.

解 $\int \mathrm{arc\,tg} x dx = x \mathrm{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$

$= x \mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

1803. $\int \arcsin x dx$.

解 $\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

1804. $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

解 $\int x\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,tg} x\,d(x^2)$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$=\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2}+C$.

1805. $\int x^2\arccos x\,dx$.

解 $\int x^2\arccos x\,dx=\frac{1}{3}\int \arccos x\,d(x^3)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x+\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}d(1-x^2)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\sqrt{1-x^2}\right)d(1-x^2)$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

$=\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{9}\sqrt{1-x^2}+C$.

1806. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$.

解 $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

作代换 $x = \sin t$，得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cdot \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| \overset{*)}{+} C$$

$$= \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\cos t}{\sin t}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C,$$

最后得

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\arcsin x$$

$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

*) 利用1703题的结果。

1807. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

1808. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$

$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$

$=x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

1809. $\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}$

$-\frac{1}{2}\int\frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}dx$

$=x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)d(\sqrt{x})$

$=(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$.

1810. $\int\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)dx$.

解 $\int\sin x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)\,dx=-\int\ln(\operatorname{tg}x)d(\cos x)$

$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int\cos x\cdot\operatorname{ctg}x\cdot\sec^2 x\,dx$

$=-\cos x\cdot\ln(\operatorname{tg}x)+\int\frac{dx}{\sin x}$

$$=-\cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}\,x)+\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

求下列积分：

1811. $\int x^5e^{x^3}dx$.

解 $\int x^5e^{x^3}dx=\frac{1}{3}\int x^3d\left(e^{x^3}\right)$

$$=\frac{1}{3}x^3e^{x^3}-\frac{1}{3}\int e^{x^3}d(x^3)$$

$$=\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3}+C.$$

1812. $\int(\arcsin x)^2dx$.

解 $\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\,d(\sqrt{1-x^2})$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2\int dx$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.$$

1813. $\int x(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2\,dx$.

解 $\int x(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2\,dx=\frac{1}{2}\int(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2-\int\frac{x^2\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}(\mathrm{arc\,tg}\,x)^2-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}(\text{arc tg}x)^2-\int \text{arctg}x\,dx+\int \text{arctg}x\,d(\text{arctg}x)$$

$$=\frac{x^2}{2}(\text{arc tg}x)^2-x\,\text{arc tg}x+\int\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\text{arctg}x)^2$$

$$=\frac{x^2+1}{2}(\text{arc tg}x)^2-x\,\text{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

1814. $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx.$

解 $\int x^2\ln\frac{1-x}{1+x}dx=\frac{1}{3}\int\ln\frac{1-x}{1+x}d(x^3)$

$$=\frac{1}{3}x^3\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}+\frac{2}{3}\int\left(-x+\frac{x}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln\frac{1-x}{1+x}-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}\ln(1-x^2)+C.$$

1815. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d(\sqrt{1+x^2})$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C.$$

1816. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$.

解 $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}d(1+x^2)$

$= -\frac{1}{2}\int x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$

$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\text{arc tg}x + C$.

1817. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

解 当 $a = 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C;$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{a^3}\text{arc tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2}$$

$$= \frac{1}{a^3}\text{arc tg}\frac{x}{a} - \frac{1}{a^3}\left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x}{a}\right]^{*)} + C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+C.$$

*) 利用1816题的结果。

1818. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{|a|}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

于是得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq 0).$$

1819. $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

解 $$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=x\sqrt{x^2+a}-\int\sqrt{x^2+a}\,dx+a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

于是得

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C.$$

1820. $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

解 $\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2+x^2)$

$$=\frac{1}{3}\int x\,d\left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\int(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$$

$$-\frac{1}{3}\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$$

于是得

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{3}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2}{3}\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}x(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}$$

$$-\frac{a^2}{4}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{x(2x^2+a^2)}{8}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$$

*) 利用1786题的结果。

1821. $\int x\sin^2 x dx$.

解 $\int x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)dx$

$=\frac{1}{2}\int x dx-\frac{1}{2}\int x\cos 2x dx$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}\int x d(\sin 2x)$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{4}\int \sin 2x dx$

$=\frac{1}{4}x^2-\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

1822. $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$\int e^{\sqrt{x}}dx=2\int te^t dt=2\int td(e^t)$

$=2te^t-2\int e^t dt$

$=2te^t-2e^t+C=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$.

1823. $\int x\sin\sqrt{x}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$，代入得

$\int x\sin\sqrt{x}dx=2\int t^3\sin t dt=-2\int t^3 d(\cos t)$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2\cos t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6\int t^2d(\sin t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t-12\int t\sin t\,dt$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12\int t\,d(\cos t)$$

$$=-2t^3\cos t+6t^2\sin t+12t\cos t-12\int\cos t\,dt$$

$$=-2(t^2-6)t\cos t+6(t^2-2)\sin t+C$$

$$=2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-6(2-x)\sin\sqrt{x}+C.$$

1824. $\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg}x})$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int e^{\operatorname{arctg}x}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(e^{\operatorname{arctg}x})$$

$$=\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}-\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是得

$$\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\operatorname{arctg}x}+C.$$

1825. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x})$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} \overset{*)}{+} C$

$= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C$.

*)　利用1824题的结果。

1826. $\int \sin(\ln x) dx$.

解 $\int \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x) - \int x\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$

$= x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx$,

于是得

$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$.

1827. $\int \cos(\ln x) dx$.

解 $\int \cos(\ln x) dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx$

$= x\cos(\ln x) + \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] \overset{*)}{+} C$

$$=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C.$$

*) 利用1826题的结果。

1828. $\int e^{ax}\cos bx dx$.

解 如果a,b同时为零，积分显然为$x+C$；若$a=0$，$b\neq0$，积分显然为$\frac{1}{b}\sin bx+C$；以下设$a\neq0$：

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{1}{a}\int\cos bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\cos bx dx,$$

于是得

$$\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{ax}\sin bx\right]$$

$$+C=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C.$$

1829. $\int e^{ax}\sin bx dx$.

解 若$a=b=0$,则积分为$x+C$；以下设$a^2+b^2\neq0$,则有

$$\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{1}{a}\int\sin bx d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}\int \cos bx\,de^{ax}$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

故 $\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C.$

1830. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

解 $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}(1-\cos 2x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int e^{2x}dx-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}\left(\frac{2\cos 2x+2\sin 2x}{8}e^{2x}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{8}e^{2x}(2-\cos 2x-\sin 2x)+C.$$

*) 利用1828题的结果。

1831. $\int (e^x-\cos x)^2dx.$

解 $\int (e^x-\cos x)^2dx=\int (e^{2x}-2e^x\cos x+\cos^2 x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-2\cdot\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}^{*)}+\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)^{**)}+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}(\cos x+\sin x)+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

*) 利用1828题的结果。

**) 利用1742题的结果。

1832. $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg} e^{x}}{e^{x}}dx$.

解 $\int\frac{\operatorname{arc\,ctg} e^{x}}{e^{x}}dx=-\int\operatorname{arc\,ctg} e^{x}d(e^{-x})$

$$=-e^{-x}\cdot\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-\int\frac{dx}{1+e^{2x}}$$

$$=-e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-\frac{1}{2}[2x-\ln(1+e^{2x})]\overset{*)}{+}C$$

$$=-e^{-x}\operatorname{arc\,ctg}(e^{x})-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C.$$

*) 利用1759题的结果。

1833. $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^{2}x}dx$.

解 $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^{2}x}dx=-\int\ln(\sin x)d(\operatorname{ctg}x)$

$$=-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(\sin x)+\int\operatorname{ctg}^{2}x\,dx$$

$$=-\operatorname{ctg}x\cdot\ln(\sin x)+(-\operatorname{ctg}x-x)\overset{*)}{+}C$$

$$=-[x+\operatorname{ctg}x\cdot\ln(e\sin x)]+C.$$

*) 利用1649题或1751题的结果。

1834. $\int\frac{x\,dx}{\cos^{2}x}$.

解 $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x} = \int x\,d(\operatorname{tg} x) = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx$

$= x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| \overset{*)}{+} C.$

*) 利用1697题的结果.

1835. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + \int \frac{1}{1+x}e^x(x+1)dx$

$= -\frac{x}{1+x}e^x + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型，并利用下列公式：

Ⅰ. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$

Ⅱ. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0);$

Ⅲ. $\int \frac{x\,dx}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2| + C;$

Ⅳ. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

Ⅵ. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$；

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0)；$$

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

求下列积分：

1836⁺. $\int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0)$.

解 当$ab > 0$时，

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C；$$

当$ab < 0$时，

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+C.$$

1837. $\int\frac{dx}{x^2-x+2}$.

解 $$\int\frac{dx}{x^2-x+2}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{7}}+C.$$

1838. $\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}$.

解 $$\int\frac{dx}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{\frac{2}{3}+\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}-\left(x-\frac{1}{3}\right)}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C.$$

1839. $\int\frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}$.

解 $$\int\frac{x\,dx}{x^4-2x^2-1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{(x^2-1)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right|+C.$$

1840. $\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx$.

解 $$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1841. $\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$.

解 $$\int\frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int\frac{x-\cos\alpha+\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d[(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha]}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$+\cos\alpha\cdot\int\frac{d(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\alpha+1)+\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)+C$$

$(\alpha\neq k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

1842. $\int\frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}$.

解 $$\int\frac{x^3dx}{x^4-x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(x^2)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}\right)+C.$$

1843. $\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}$.

解 $$\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3d(x^3)}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^6-x^3-2|-\frac{1}{18}\ln\left|\frac{\frac{3}{2}+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}-\left(x^3-\frac{1}{2}\right)}\right|+C$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\}+C.$$

如果本题不化成正则型来作，则有更简单的作法，事实上，

$$\int\frac{x^5dx}{x^6-x^3-2}=\frac{1}{3}\int\frac{x^3d(x^3)}{(x^3-2)\ (x^3+1)}$$

$$=\frac{1}{9}\int\left(\frac{2}{x^3-2}+\frac{1}{x^3+1}\right)d(x^3)$$

$$=\frac{1}{9}\ln\{|x^3+1|\cdot(x^3-2)^2\}+C.$$

1844. $\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$.

解 $$\int\frac{dx}{3\sin^2x-8\sin x\cos x+5\cos^2x}$$

$$=\int\frac{d(\mathrm{tg}x)}{3\mathrm{tg}^2x-8\mathrm{tg}x+5}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{d\left(\mathrm{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\left(\mathrm{tg}x-\frac{4}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-\left(\mathrm{tg}x-\frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3}+\left(\mathrm{tg}x-\frac{4}{3}\right)}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x-5\cos x}{\sin x-\cos x}\right|+C.$$

1845. $\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}dx}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4+\sec^2\frac{x}{2}}$

$$=2\int\frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)^2+4}=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right)+C.$$

1846. $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}\quad(b\neq0)$.

解 当$b>0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right|+C;$$

当$a>0$及$b<0$时，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{-b}}\int\frac{d(\sqrt{-b}x)}{\sqrt{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{-b}x)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C.$$

1847. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{d(x+1)}{\sqrt{2-(x+1)^2}}$

$$=\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

1848. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$$=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right|+C.$$

本题即1687题，注意不同的解法及不同形式的结果。

1849. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{x}{2}+1}\right)+C.$$

1850. 证明：若

$$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0),$$

则当$a>0$时，$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C$；

当$a<0$时，$\int\frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$.

证 当$a>0$时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{y'}{2}+\sqrt{ay}\right|+C_1$$

当$a<0$时，

$$\int \frac{dx}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\int \frac{d\left(x+\frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{-2a}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)+C.$$

1851. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解 $$\int\frac{xdx}{\sqrt{5+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right)+C.$$

1852. $\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx.$

解 $$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

1853. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

解 $$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16}-\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right)+C.$$

1854. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解 $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2d(x^2)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1}$

$+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right|+C$.

1855. $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx$.

解 $\int\frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(x^2-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2}}$

$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2-x^4}+\frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{5}}\right)+C$.

1856. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 作代换$t=\frac{1}{x}$，则$x\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\operatorname{sgn} t}{t^2}\sqrt{t^2+t+1}$，

$dx=-\frac{dt}{t^2}$。于是

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -(\operatorname{sgn} t)\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$= -(\operatorname{sgn} t)\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|^{*)} + C_1$$

$$= -(\operatorname{sgn} x)\ln\left|\frac{x+2+2(\operatorname{sgn} x)\sqrt{x^2+x+1}}{2x}\right| + C_1.$$

故当 $x>0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

当 $x<0$ 时，

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln\left|\frac{2x}{x+2-2\sqrt{x^2+x+1}}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{2x(x+2+2\sqrt{x^2+x+1})}{(x+2)^2-4(x^2+x+1)}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

总之，不论 x 为正或为负，均有

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = -\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right| + C.$$

*）利用1850题的结果.

1857. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 作代换$t=\frac{1}{x}$，则$x^2\sqrt{x^2+x-1}$

$$=\operatorname{sgn}t\cdot\frac{\sqrt{-t^2+t+1}}{t^3},\quad dx=-\frac{dt}{t^2}.$$ 于是

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}=-(\operatorname{sgn}t)\int\frac{t}{\sqrt{-t^2+t+1}}dt$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\frac{1}{2}\int\frac{d(-t^2+t+1)}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{-t^2+t+1}}\right)$$

$$=-(\operatorname{sgn}t)\cdot\left(-\sqrt{-t^2+t+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right)^{*)}+C$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\cdot\left[\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{|x|}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{x\sqrt{5}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{x}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{|x|\sqrt{5}}\right)+C.$$

其存在域为$\left|x+\frac{1}{2}\right|>\frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用1850题的结果。

1858. $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设$y=x+1$，本题即转化为1856题的类型. 由于解法类似，且$x+1$的符号对结果没有影响，故仅就$x+1>0$列出解法的主要步骤如下：

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}}$$

$$=-\int\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2}-\frac{2}{y}+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{y}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|+C.$$

1859. $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

解 设$x-1=\frac{1}{t}$，则

$$(x-1)\sqrt{x^2-2}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}=-\int\frac{\operatorname{sgn}t\,dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=-\operatorname{sgn}t\cdot\arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right)+C\quad(|x|>\sqrt{2}).$$

1860+. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$.

解 设$x+2=\frac{1}{t}$，则

$$(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}=\frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|},$$

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}=-\int \frac{t\cdot \operatorname{sgn} t\,dt}{\sqrt{1-2t-5t^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\left[\left(t+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}\right]\operatorname{sgn} t\,dt}{\sqrt{\frac{6}{25}-\left(t+\frac{1}{5}\right)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sgn} t\cdot\sqrt{\frac{1}{5}-\frac{2}{5}t-t^2}$$

$$+\frac{1}{5\sqrt{5}}\operatorname{sgn} t\cdot\arcsin\left(\frac{5t+1}{\sqrt{6}}\right)+C$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{5(x+2)}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\arcsin\left(\frac{x+7}{|x+2|\sqrt{6}}\right)$$

$$+C.$$

其存在域为满足不等式$x^2+2x-5>0$的一切x值，即$|x+1|>\sqrt{6}$.

1861. $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx$.

解 $\int\sqrt{2+x-x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{3}\right)+C.$

1862. $\int\sqrt{2+x+x^2}\,dx.$

解 $\int\sqrt{2+x+x^2}\,dx=\int\sqrt{\frac{7}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+\frac{7}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{2+x+x^2}\right)$

$+C.$

1863. $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx.$

解 $\int\sqrt{x^4+2x^2-1}\,x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(x^2+1)^2-2}\,d(x^2+1)$

$=\frac{x^2+1}{4}\sqrt{x^4+2x^2-1}$

$-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1+\sqrt{x^4+2x^2-1}\right)+C.$

1864. $\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

解 由于

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|+C_1$$

（可仿照1856题求得），

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2,$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-\sqrt{1+x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_3,$$

所以

$$\int\frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}dx=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)-\sqrt{1+x-x^2}+C,$$

其中存在域为满足不等式$1+x-x^2>0$且$x\neq 0$的一切x值，即$\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$及$x\neq 0$。

1865. $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$.

解 $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx=\int\frac{\operatorname{sgn}x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}dx$

$$=\int\frac{\operatorname{sgn}x\,d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot\ln\left(x-\frac{1}{x}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\right)+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$$

§2. 有理函数的积分法

利用待定系数法，求下列积分：

1866. $\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx.$

解 设$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}$，通分后应有

$$2x+3\equiv A(x+5)+B(x-2).$$

在这恒等式中，

令$x=2$*)，得$7=7A$，$A=1$；

令$x=-5$，得$-7=-7B$，$B=1$.

于是，

$$\int\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+5}\right)dx$$

$=\ln|(x-2)(x+5)|+C$.

*) 注意，这是一种习惯的说法。实际上，不能直接令$x=2$(因为上述恒等式是当$x\neq 2$，$x\neq -5$时得出来的)，而应令$x\to 2$取极限，得$7=7A$，以下类似情况都作此理解。

1867. $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

解 设$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3}$,

通分后应有

$$x\equiv A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)\cdot(x+2).$$

在这恒等式中，

令$x=-1$，得$-1=2A$, $A=-\frac{1}{2}$;

令$x=-2$，得$-2=-B$, $B=2$;

令$x=-3$，得$-3=2C$, $C=-\frac{3}{2}$.

于是，

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{-\frac{3}{2}}{x+3}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+2\ln|x+2|-\frac{3}{2}\ln|x+3|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C.$$

1868. $\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx$.

解 $\frac{x^{10}}{x^2+x-2}=x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4-21x^3$

$+43x^2-85x+171+\frac{-341x+342}{x^2+x-2}$,

设$\frac{-341x+342}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$，通分后应有

$-341x+342\equiv A(x-1)+B(x+2)$.

在这恒等式中，

令$x=-2$，得$1024=-3A$，$A=-\frac{1024}{3}$，

令$x=1$，得$1=3B$，$B=\frac{1}{3}$.

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{x^2+x-2}dx=\int\Big[x^8-x^7+3x^6-5x^5+11x^4$$

$$-21x^3+43x^2-85x+171$$

$$-\frac{1024}{3(x+2)}+\frac{1}{3(x-1)}\Big]dx$$

$$=\frac{x^9}{9}-\frac{x^8}{8}+\frac{3x^7}{7}-\frac{5x^6}{6}+\frac{11x^5}{5}-\frac{21x^4}{4}+\frac{43x^3}{3}-\frac{85x^2}{2}$$

$$+171x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{(x+2)^{1024}}\right|+C.$$

1869. $\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx.$

解 $$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$$

$$=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)},$$

设$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$，通分后应有

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2).$$

在这恒等式中，

令$x=0$，得$1=6A$，$A=\frac{1}{6}$，

令$x=2$，得$9=-2B$，$B=-\frac{9}{2}$，

令$x=3$，得$28=3C$，$C=\frac{28}{3}$.

于是，

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$$

$$=\int\left[1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right]dx$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C.$$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$.

解 $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = 1+\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

设 $\frac{-(5x^2+4)}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+4}$，通分后应有

$$-(5x^2+4)\equiv(A_1x+B_1)(x^2+4)+(A_2x+B_2)(x^2+1).$$

比较等式两端x的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A_1+A_2=0, \\ x^2 & B_1+B_2=-5, \\ x^1 & 4A_1+A_2=0, \\ x^0 & 4B_1+B_2=-4. \end{array}$$

由此，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{3}$，$A_2=0$，$B_2=-\frac{16}{3}$.

于是，

$$\int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$$

$$=\int\left[1+\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{16}{3(x^2+4)}\right]dx$$

$$=x+\frac{1}{3}\text{arc tg}x-\frac{8}{3}\text{arc tg}\frac{x}{2}+C.$$

1871. $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

解 $\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$，通分后应有

$$x\equiv A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$，得$1=3B$，$B=\frac{1}{3}$；

令$x=-2$，得$-2=9C$，$C=-\frac{2}{9}$，

比较x^2的系数，得$A+C=0$，从而$A=\frac{2}{9}$。

于是，

$$\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}=\int\left[\frac{2}{9(x-1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}-\frac{2}{9(x+2)}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

1872. $\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$.

解 设$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-1}$，通分后应有

$$x^2+1\equiv A(x+1)(x-1)+B(x-1)+C(x+1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=-1$，得$2=-2B$，$B=-1$；

令$x=1$，得$2=4C$，$C=\frac{1}{2}$，

比较x^2的系数，得$A+C=1$，从而$A=\frac{1}{2}$。

于是，

$$\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$$

$$=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

1873. $\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$.

解 $\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$

$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$，通分后应有

$$x^2\equiv A(x-1)(x-2)^2+B(x-2)^2$$
$$+C(x-2)(x-1)^2+D(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$ 得$B=1$；

令$x=2$，得$D=4$；

比较x^3及x^2的系数，得

$A+C=0$ 及 $-5A+B-4C+D=1$，

由此，$A=4$，$C=-4$。

于是，

$$\int\left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2dx$$

$$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]dx$$

$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+C$$

$$=4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{5x-6}{x^2-3x+2}+C.$$

1874. $\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}+\frac{D}{x+3}+\frac{E}{(x+3)^2}$$

$+\frac{F}{(x+3)^3}$，通分后应有

$$1\equiv A(x+2)^2(x+3)^3+B(x+1)(x+2)(x+3)^3$$
$$+C(x+1)(x+3)^3+D(x+1)(x+2)^2$$
$$(x+3)^2+E(x+1)(x+2)^2(x+3)$$
$$+F(x+1)(x+2)^2.$$

在这恒等式中，

令 $x=-1$，得 $1=8A$，$A=\frac{1}{8}$；

令 $x=-2$，得 $1=-C$，$C=-1$；

令$x=-3$，得$1=-2F$，$F=-\frac{1}{2}$；

比较x^5、x^4及x^3的系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & A+B+D=0, \\ x^4 & 13A+12B+C+11D+E=0, \\ x^3 & 67A+56B+10C+47D+8E+F=0. \end{array}$$

由此，$B=2$，$D=-\frac{17}{8}$，$E=-\frac{5}{4}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$=\int\left[\frac{1}{8(x+1)}+\frac{2}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{17}{8(x+3)}\right.$$

$$\left.-\frac{5}{4(x+3)^2}-\frac{1}{2(x+3)^3}\right]dx$$

$$=\frac{1}{8}\ln|x+1|+2\ln|x+2|+\frac{1}{x+2}-\frac{17}{8}\ln|x+3|$$

$$+\frac{5}{4(x+3)}+\frac{1}{4(x+3)^2}+C$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+C.$$

1875. $\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$.

解 $\frac{1}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{1}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2\cdot(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2.$$

在这恒等式中，

令$x=1$，得$1=8B$，$B=\frac{1}{8}$；

令$x=-1$，得$1=4E$，$E=\frac{1}{4}$；

令$x=0$，得$-A+B+C+D+E=1$；

令$x=2$，得$27A+27B+9C+3D+E=1$；

令$x=-2$，得$3A-B+9C-9D+9E=1$；

由此，$A=-\frac{3}{16}$，$C=\frac{3}{16}$，$D=\frac{1}{4}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}$$

$$=\int\left[-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{8(x-1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x+1)^2}+\frac{1}{4(x+1)^3}\right]dx$$

$$=-\frac{3}{16}\ln|x-1|-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\ln|x+1|-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{8(x+1)^2}+C$$

$$=\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{3x^2+3x-2}{8(x-1)(x+1)^2}+C.$$

1876. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$.

解 设$\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$，通分后应有

$$x^2+5x+4\equiv(Ax+B)(x^2+4)$$
$$+(Cx+D)(x^2+1).$$

比较等式两端x的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=1, \\ x^1 & 4A+C=5, \\ x^0 & 4B+D=4. \end{array}$$

由此，$A=\frac{5}{3}$，$B=1$，$C=-\frac{5}{3}$，$D=0$。

于是，

$$\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx=\int\left(\frac{\frac{5}{3}x+1}{x^2+1}+\frac{-\frac{5}{3}x}{x^2+4}\right)dx$$

$$=\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解，而使用其它技巧，也可有更简单的方法。事实上，

$$\int\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$$

$$=\int\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^2+4)}dx+5\int\frac{xdx}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2)}{(x^2+4)(x^2+1)}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{5}{6}\int\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+4}\right)d(x^2)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{5}{6}\ln\frac{x^2+1}{x^2+4}+C.$$

1877. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

解 设$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\int\left[\frac{1}{2(x+1)}-\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

1878. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$.

解 由于 $\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$

$$=\frac{(x^2-4x+5)-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5},$$

于是，

$$\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-4x+5}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\int\frac{d(x-2)}{(x-2)^2+1}$$

$$=-\frac{1}{x-2}-\operatorname{arc\,tg}(x-2)+C.$$

本题若用待定系数法，较麻烦一些，也可获得同样的结果，此处从略。

1879. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$.

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}$

$+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$，通分后应有

$$x \equiv A(x-1)(x^2+2x+2)+B(x^2+2x+2)$$
$$+(Cx+D)(x-1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & A+B-2C+D=0, \\ x^1 & 2B+C-2D=1, \\ x^0 & -2A+2B+D=0. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{25}$，$B=\frac{1}{5}$，$C=-\frac{1}{25}$，$D=-\frac{8}{25}$。

于是，

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$$

$$=\int\left[\frac{1}{25(x-1)}+\frac{1}{5(x-1)^2}-\frac{x+8}{25(x^2+2x+2)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$$

$$-\frac{7}{25}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{25}\ln|x-1|-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{1}{50}\ln\left(x^2+2x+2\right)$$

$$-\frac{7}{25}\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C$$

$$=\frac{1}{50}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{5(x-1)}$$

$$-\frac{7}{25}\text{arc tg}(x+1)+C.$$

1880. $\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$.

解 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$,

通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(1+x+x^2)+Bx(1+x+x^2)$$
$$+x(x+1)(Cx+D).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+B+C=0, \\ x^2 & 2A+B+C+D=0, \\ x^1 & 2A+B+D=0, \\ x^0 & A=1. \end{array}$$

由此，$A=1$，$B=-1$，$C=0$，$D=-1$.

于是，

$$\int\frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}\right)dx$$

$$=\ln\left|\frac{x}{1+x}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

本题也可以不用待定系数法。事实上，

$$\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)}$$

$$=\frac{1}{x+x^2}-\frac{1}{1+x+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x+x^2}.$$

1881. $\int\frac{dx}{x^3+1}$.

解 设 $\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$，通分后应有

$$1\equiv A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & -A+B+C=0, \\ x^0 & A+C=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{2}{3}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

1882. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}$.

解 设$\frac{x}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，通分后应有

$$x\equiv A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=\frac{1}{3}$.

于是，

$$\int \frac{x}{x^3-1}dx=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3(x^2+x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}$.

解 $\int\frac{dx}{x^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

本题若用待定系数法，则较麻烦．从略。

1884. $\int\frac{dx}{x^4+1}$.

解 本题如用待定系数法来作，主要步骤如下：

设$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}$，则经计算可求得$A=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, $D=\frac{1}{2}$. 于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\ln(x^2+x\sqrt{2}+1)-\ln(x^2-x\sqrt{2}+1)]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)+C.$$

如应用下列解法，则更简单些.

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}^{**)}+C_1,$$

注意到 $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$， 最后

即得

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+C.$$

*) 利用1712题的结果.

**) 利用1713题的结果.

1885. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

解 设$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$，通分后

应有

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & -A+B+C+D=0, \\ x^1 & A-B+C+D=0, \\ x^0 & B+D=1. \end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{2}$，$D=\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\int\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+x+1}dx-\int\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln(x^2+x+1)-\ln(x^2-x+1)\right]$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C.$$

如不用待定系数法解本题，则更简单些，解法与上题类似：

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\text{arc tg}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C.$$

1886. $\int\frac{dx}{x^6+1}$.

解 本题如用待定系数法来作，运算较麻烦，经计算可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}$$

$$+\frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1},$$

积分步骤与1884题与1885题完全类似，不再详解，其结果为$\frac{1}{2}\text{arc tg}x+\frac{1}{6}\text{arc tg}(x^3)$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

本题如不用待定系数法来作，则更简单些。下面列举两种解法：

解法一

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^4-1}{x^6+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+(x^4-x^2+1)}{x^6+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^6+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2}+\frac{1}{2}\text{arc tg}x-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{6}\text{arc tg}(x^3)+\frac{1}{2}\text{arc tg}x$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

解法二

仿照1881题的分解法，可得

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{1}{3(x^2+1)}-\frac{x^2-2}{3(x^4-x^2+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{x^6+1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{(x^2-2)dx}{x^4-x^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{6}\int\frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\int\frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

两种答案形式不同，实质上是一致的。

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}$.

解 设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$

$$+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1)+B(x^2+1)$$
$$(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1)$$
$$+(Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & A+C+E=0, \\
x^4 & B+C+D+2E+F=0, \\
x^3 & A+D+2E+2F-B=0, \\
x^2 & A+2B+C+2E+2F=0, \\
x^1 & -B+C+D+E+2F=0, \\
x^0 & A+B+D+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{1}{3}$，$B=\frac{1}{6}$，$C=0$，$D=\frac{1}{2}$，$E=-\frac{1}{3}$，$F=0$。

于是，

$$\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}=\int\Big[\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{6(x+1)^2}$$

$$+\frac{1}{2(x^2+1)}-\frac{x}{3(x^2-x+1)}\Big\}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}-\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$$

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1888. $\int\frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

解 设 $\frac{1}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$

$$=\frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1},$$

通分后应有

$$1\equiv A(x^2+x+1)(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-1)$$
$$(x^2-x+1)+(Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$
\begin{array}{c|l}
x^4 & A+B+D=0, \\
x^3 & -2B+C+E=0, \\
x^2 & A+2B-2C=0, \\
x^1 & -B+2C-D=0, \\
x^0 & A-C-E=1.
\end{array}
$$

由此，$A=\frac{1}{3}, B=-\frac{1}{3}, C=-\frac{1}{6}, D=0, E=-\frac{1}{2}$.

于是，

$$\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$$

$$=\int\left[\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)}-\frac{1}{2(x^2+x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1889. $\int \frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$.

解 设 $\frac{x^2}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}$

$+\frac{Cx+D}{x^2+x+\frac{1}{2}}$，通分后应有

$$x^2=(Ax+B)(x^2+x+\frac{1}{2})$$

$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A+C=0, \\
x^2 & A+B+2C+D=1, \\
x^1 & \frac{A}{2}+B+2C+2D=0, \\
x^0 & \frac{B}{2}+2D=0.
\end{array}$$

由此， $A=\frac{4}{5}, B=\frac{12}{5}, C=-\frac{4}{5}, D=-\frac{3}{5}.$

于是，

$$\int\frac{x^2dx}{x^4+3x^3+\frac{9}{2}x^2+3x+1}$$

$$=\int\left[\frac{4(x+3)}{5(x^2+2x+2)}-\frac{4x+3}{5\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)}\right]dx$$

$$=\frac{2}{5}\int\frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2}+\frac{8}{5}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$-\frac{2}{5}\int\frac{(2x+1)dx}{x^2+x+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+x+\frac{1}{2}}+\frac{8}{5}\operatorname{arc\,tg}(x+1)$$

$-\frac{2}{5}\operatorname{arc\,tg}(2x+1)+C$。

1890．在甚么条件下，积分

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数?

解 设$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2}$，

通分后应有

$$ax^2+bx+c\equiv Ax^2(x-1)^2+Bx(x-1)^2+C(x-1)^2+Dx^3(x-1)+Ex^3.$$

比较等式两端x的同次幂系数，得

x^4	$A+D=0$，
x^3	$-2A+B-D+E=0$，
x^2	$A-2B+C=a$，
x^1	$B-2C=b$，
x^0	$C=c$。

由此，$A=a+2b+3c$，$B=b+2c$，$C=c$，

$D=-(a+2b+3c)$，$E=a+b+c$。

当$A=D=0$，即$a+2b+3c=0$时，积分

$$\int\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$$

为有理函数。

利用奥斯特洛格拉得斯基方法*，计算积分：

1891. $\int\frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

解 $Q=(x-1)^2(x+1)^3$,

$Q_1=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$,

$Q_2=(x-1)(x+1)=x^2-1$.

设 $\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}$

$$=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+x^2-x-1}\right)'+\frac{Dx+E}{x^2-1},$$ 从而

$$x\equiv(2Ax+B)(x-1)(x+1)-(3x-1)$$
$$\cdot(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)(x-1)(x+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

---

* 所谓奥氏方法，是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分，可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和，使得在新的被积真分式函数中，其分母次数达到最低状态，也即在公式

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx \qquad (1)$$

中，如果 $P(x),Q(x)$ 已知，且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式：

$$Q(x)=(x-a)^k\cdots(x^2+px+q)^m\cdots,$$

其中 $k,\cdots,m,\cdots$ 是自然数。在公式（1）的右端分母已知，形如：

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\cdots(x^2+px+q)^{m-1}\cdots,$$
$$Q_2(x)=(x-a)\cdots(x^2+px+q)\cdots,$$

且满足 $Q_1(x)\cdot Q_2(x)=Q(x)$。而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式，一般可用待定系数法求得。这种利用公式（1）来求积分的方法，就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法。详细可以参见Γ. M. 菲赫金哥尔茨著（北大译），微积分学教程，第二卷一分册，第264目。 ——题解编者注

$$\begin{array}{l|l} x^4 & D=0, \\ x^3 & -A+D+E=0, \\ x^2 & A-2B-D+E=0, \\ x^1 & -2A-3C+B-D-E=1, \\ x^0 & -B-C-E=0. \end{array}$$

由此，$A=-\frac{1}{8}$，$B=-\frac{1}{8}$，$C=-\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=-\frac{1}{8}$。

于是，

$$\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}$$

$$-\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$=-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$.

解 $Q=(x+1)^2(x^2-x+1)^2$,

$Q_1=Q_2=x^3+1$.

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2}=\left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1}\right)'+\frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$，从而

$$1\equiv(2Ax+B)(x^3+1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)$$

$$+(Dx^2+Ex+F)(x^3+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & D=0, \\
x^4 & -A+E=0, \\
x^3 & -2B+F=0, \\
x^2 & -3C+D=0, \\
x^1 & 2A+E=0, \\
x^0 & B+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=0, B=\frac{1}{3}$，$C=0$，$D=0$，$E=0$，$F=\frac{2}{3}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^3+1)^2}=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^3+1}$$

$$=\frac{x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^{*)}+C.$$

*) 利用1881题的结果。

1893. $\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

解 $Q=(x^2+1)^3, Q_1=(x^2+1)^2, Q_2=x^2+1$.

设 $\frac{1}{(x^2+1)^3}=\left[\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x^2+1)^2}\right]'+\frac{Ex+F}{x^2+1}$，

从而

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+1)-4x(Ax^3+Bx^2$$

$$+Cx+D)+(Ex+F)(x^2+1)^2.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & E=0, \\
x^4 & -A+F=0, \\
x^3 & -2B+2E=0, \\
x^2 & 3A-3C+2F=0, \\
x^1 & 2B-4D+E=0, \\
x^0 & C+F=1.
\end{array}$$

由此，$A=\frac{3}{8}, B=0, C=\frac{5}{8}, D=0$ ，$E=0$，$F=\frac{3}{8}$.

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3}=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{x(3x^2+5)}{8(x^2+1)^3}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

1894. $\int\frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

解 $Q=(x^2+2x+2)^2$，$Q_1=Q_2=x^2+2x+2$。

设 $$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+2x+2}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+2x+2},$$

从而

$$x^2\equiv A(x^2+2x+2)-2(x+1)(Ax+B)$$
$$+(Cx+D)(x^2+2x+2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C=0, \\ x^2 & -A+2C+D=1, \\ x^1 & -2B+2C+2D=0, \\ x^0 & 2A-2B+2D=0. \end{array}$$

由此，$A=0$，$B=1$，$C=0$，$D=1$。

于是，

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}+\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}$$

$$=\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arc\,tg}(x+1)+C.$$

本题如不用奥斯特洛格拉得斯基方法，则更容易得出上述结果。事实上，

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}=\int \frac{(x^2+2x+2)-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}dx$$

$$=\int \frac{dx}{x^2+2x+2}-\int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}-\int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.$$

1895. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$。

解 $Q=(x^4+1)^2$，$Q_1=Q_2=x^4+1$，

设 $\dfrac{1}{(x^4+1)^2}=\left(\dfrac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}\right)'$

$+\dfrac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}$，从而

$$1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+(Ex^3+Fx^2+Gx+H)(x^4+1)。$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{c|l} x^7 & E=0, \\ x^6 & -A+F=0, \\ x^5 & -2B+G=0, \\ x^4 & -3C+H=0, \\ x^3 & -4D+E=0, \\ x^2 & 3A+F=0, \\ x^1 & 2B+G=0, \\ x^0 & C+H=1. \end{array}$$

由此，$A=0$，$B=0$，$C=\frac{1}{4}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，

$G=0$，$H=\frac{3}{4}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^4+1}$$

$$=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}{}^{*)}+C$$

*) 利用1884题的结果。

1896. $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$.

解 $Q=(x-1)(x^2+x+1)^2$, $Q_1=x^2+x+1$,
$Q_2=(x-1)(x^2+x+1)$.

设$\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'$

$+\frac{Cx^2+Dx+E}{(x-1)(x^2+x+1)}$，从而

$$x^2+3x-2\equiv A(x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)$$
$$\cdot(Ax+B)(x-1)+(Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端x的同次幂系数，得

x^4 | $C=0$,
x^3 | $-A+C+D=0$,
x^2 | $A-2B+C+D+E=1$,
x^1 | $A+B+D+E=3$,
x^0 | $-A+B+E=-2$.

由此，$A=\frac{5}{3}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=0$, $D=\frac{5}{3}$, $E=-1$.

再将$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$分解，可得

$$\frac{\frac{5}{3}x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{9(x-1)}-\frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是，

$$\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{9}\int\frac{2x-11}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{9}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$$

$$+\frac{4}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1897. $\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q=(x^4-1)^3$，$Q_1=(x^4-1)^2$，$Q_2=x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3}=\left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2}\right]'+\frac{P_1(x)}{x^4-1}$，其中

$P(x)=Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3$
$+Fx^2+Gx+H$,
$P_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1$,

从而利用待定系数法，解出$A=0$，$B=0$，$C=\frac{7}{32}$，$D=0$，$E=0$，$F=0$，$G=-\frac{11}{32}$，$H=0$，$A_1=0$，$B_1=0$，$C_1=0$，$D_1=\frac{21}{32}$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^4-1)^3}=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{32}\int\frac{dx}{x^4-1}$$

$$=\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arc\,tg}x^{*)}+C.$$

*）利用1883题的结果。

分出下列积分的代数部分：

1898. $\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$.

解 设$\int\frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$

$$=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+x^2+1}$$

$$+\int\frac{A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1}{x^4+x^2+1}dx.$$

上述等式右端的积分为非代数部分，因此，只需要求出A、B、C、D就可以了。等式两端求导并通分，得

$$x^2+1\equiv(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+x^2+1)$$

$$-(4x^3+2x)(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$

$$+(A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1)(x^4+x^2+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=\frac{1}{6}$， $B=0$，$C=\frac{1}{3}$，$D=0$，$A_1=0$，$B_1=\frac{1}{6}$，$C_1=0$，$D_1=\frac{2}{3}$。因此，所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}.$$

1899$^+$. $\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$.

解 设

$$\int\frac{dx}{(x^3+x+1)^3}$$

$$=\frac{Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F}{(x^3+x+1)^2}$$

$$+\int\frac{Gx^2+Hx+L}{x^3+x+1}\,dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$\begin{aligned}1\equiv&(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(x^3+x+1)\\&-2(3x^2+1)(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\\&+(Gx^2+Hx+L)(x^3+x+1)^2.\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，解出 $A=-\frac{243}{961}$，$B=\frac{357}{1922}$， $C=-\frac{405}{961}$， $D=-\frac{315}{1922}$， $E=\frac{156}{961}$，$F=-\frac{224}{961}$，$G=0$， $H=-\frac{243}{961}$， $L=\frac{357}{961}$。因此，所

求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5-357x^4+810x^3+315x^2-312x+448}{1922(x^3+x+1)^2}.$$

1900. $\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx.$

解 设$\int\frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}dx$

$$=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}$$

$$+\int\frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M}{x^5+x+1}dx.$$

对上述等式两端求导再通分，得

$$4x^5-1\equiv(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)(x^5+x+1)$$
$$-(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)$$
$$+(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Lx+M)(x^5+x+1).$$

比较等式两端x的同次幂系数，解出$A=0$，$B=0$，$C=0$，$D=-1$，$E=0$，$F=0$，$G=0$，$H=0$，$L=0$，$M=0$．因此，所求积分的代数部分为

$$-\frac{x}{x^5+x+1}\text{（全部积分）}.$$

1901. 计算积分

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}.$$

解 $Q=x^4+2x^3+3x^2+2x+1=(x^2+x+1)^2$,

$$Q_1=Q_2=x^2+x+1.$$

设 $\frac{1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$

$$=\left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1}\right)'+\frac{Cx+D}{x^2+x+1},\text{ 从而}$$

$$1\equiv A(x^2+x+1)-(2x+1)(Ax+B)$$
$$+(Cx+D)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,解出 $A=\frac{2}{3}$, $B=\frac{1}{3}$,

$C=0$, $D=\frac{2}{3}$。于是,

$$\int\frac{dx}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1902$^+$. 在甚么条件下,积分

$$\int\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}dx$$

为有理函数?

解 (1) 当 $a\neq 0$ 且 $b^2-ac=0$ 时,$ax^2+2bx+c$

$=a(x-x_0)^2$，其中x_0为实数。此时

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\alpha(x-x_0)^2+2\alpha x_0(x-x_0)+\alpha x_0^2+2\beta(x-x_0)+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

$$=\frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2}+\frac{2\alpha x_0+2\beta}{a^2(x-x_0)^3}+\frac{\alpha x_0^2+2\beta x_0+\gamma}{a^2(x-x_0)^4},$$

从而积分为有理函数。

（2）当$a\neq 0$且$b^2-ac\neq 0$时，则设

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\left(\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}\right)'+\frac{Cx+D}{ax^2+2bx+c},$$

从而

$$\alpha x^2+2\beta x+\gamma\equiv A(ax^2+2bx+c)-(2ax+2b)(Ax+B)+(Cx+D)(ax^2+2bx+c),$$

比较等式两端x的同次幂系数，可解得$C=0$，

$D=\dfrac{2b\beta-a\gamma-c\alpha}{2(b^2-ac)}$。从而当$a\gamma+c\alpha=2b\beta$时$D=0$，

此时积分为有理函数。

（3）当$a=0$，$b\neq 0$时，

$$\frac{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}{(ax^2+2bx+c)^2}$$

$$=\frac{\alpha\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2-\frac{\alpha c}{b}\left(x+\frac{c}{2b}\right)+\frac{\alpha c^2}{4b^2}+2\beta\left(x+\frac{c}{2b}\right)-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}$$

$$=\frac{\alpha}{4b^2}+\frac{2\beta-\frac{\alpha c}{b}}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)}+\frac{\frac{\alpha c^2}{4b^2}-\frac{\beta c}{b}+\gamma}{4b^2\left(x+\frac{c}{2b}\right)^2}.$$

故当 $2\beta-\frac{\alpha c}{b}=0$ 即$\alpha c=2b\beta$时，积分为有理函数。这种情况可归并到$a\gamma+c\alpha=2b\beta$中去。

(4) 当$a=b=0$，$c\neq 0$时，积分显然为有理函数，这种情况可归并到$b^2-ac=0$中去。

综上所述，当$b^2-ac=0$或$a\gamma+c\alpha=2b\beta$时，积分为有理函数。

利用各种方法，计算下列积分：

1903. $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

解 $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx=\int\frac{[(x-1)+1]^3}{(x-1)^{100}}dx$

$$=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]dx$$

$$=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}$$

$$-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$$

1904. $\int \frac{xdx}{x^8-1}$.

解 $\int \frac{xdx}{x^8-1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^4-1}$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|-\frac{1}{4}\mathrm{arc\,tg}(x^2)\overset{*)}{+}C.$$

*) 利用1883题的结果。

1905. $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}$.

解 $\int \frac{x^3dx}{x^8+3}=\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2+3}$

$$=\frac{1}{4\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{x^4}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1906. $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx$.

解 $\int \frac{x^2+x}{x^6+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3+1}$

$$=\frac{1}{3}\mathrm{arc\,tg}(x^3)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x^3)+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

*) 利用1881题的结果。

1907. $\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx.$

解 $$\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}dx=\int\frac{\left(1-\frac{3}{x^4}\right)dx}{x^5\left(1+\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^8}\right)}$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{3}{x^4}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8}+\frac{3}{x^4}+1}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(\frac{5}{\frac{2}{x^4}+1}-\frac{4}{\frac{1}{x^4}+1}\right)d\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

$$=-\frac{5}{8}\ln\left(\frac{2}{x^4}+1\right)+\ln\left(\frac{1}{x^4}+1\right)+C$$

$$=\frac{5}{8}\ln\frac{x^4}{x^4+2}-\ln\frac{x^4}{x^4+1}+C.$$

1908. $\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}.$

解 $$\int\frac{x^4dx}{(x^{10}-10)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5)}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{[(x^5+\sqrt{10})-(x^5-\sqrt{10})]^2}{[(x^5-\sqrt{10})(x^5+\sqrt{10})]^2}d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\left(\frac{1}{x^5-\sqrt{10}}-\frac{1}{x^5+\sqrt{10}}\right)^2 d(x^5)$$

$$=\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5-\sqrt{10})}{(x^5-\sqrt{10})^2}-\frac{1}{100}\int\frac{d(x^5)}{(x^5)^2-10}$$

$$+\frac{1}{200}\int\frac{d(x^5+\sqrt{10})}{(x^5+\sqrt{10})^2}$$

$$=-\frac{1}{200(x^5-\sqrt{10})}-\frac{1}{200\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|$$

$$-\frac{1}{200(x^5+\sqrt{10})}+C$$

$$=-\frac{1}{100}\left(\frac{x^5}{x^{10}-10}+\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x^5-\sqrt{10}}{x^5+\sqrt{10}}\right|\right)+C.$$

1909. $\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$.

解 $\int\frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{x^8d(x^4)}{(x^4+1)(x^4+2)}$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1-\frac{3x^4+2}{(x^4+1)(x^4+2)}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{x^4+1}-\frac{4}{x^4+2}\right]d(x^4)$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{(x^4+2)^4}+C.$$

1910. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$.

解 $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10}+2x^5+2)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$= \frac{1}{5}\int \frac{(x^5+1)d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$= \frac{1}{10}\int \frac{d[(x^5+1)^2+1]}{[(x^5+1)^2+1]^2} - \frac{1}{5}\int \frac{d(x^5+1)}{[(x^5+1)^2+1]^2}$

$= -\frac{1}{10[(x^5+1)^2+1]}$

$-\frac{1}{5}\left\{\frac{x^5+1}{2[(x^5+1)^2+1]} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\ tg}(x^5+1)\right\}^{*)} + C$

$= -\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)} - \frac{1}{10}\operatorname{arc\ tg}(x^5+1) + C$.

*) 利用1817题的结果。

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$.

解 当$n\neq 0$时，

$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}dx}{x^n+1}$

$= \frac{1}{n}\int \frac{x^n d(x^n)}{x^n+1}$

$= \frac{1}{n}\int \left(1 - \frac{1}{x^n+1}\right)d(x^n)$

$$=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C;$$

当 $n=0$时，

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx=\int\frac{dx}{2x}=\frac{1}{2}\ln|x|+C.$$

1912. $\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx.$

解 当$n\neq 0$时，

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\int\frac{x^{2n}\cdot x^{n-1}dx}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{x^{2n}d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{(x^{2n}+1)-1}{(x^{2n}+1)^2}d(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{x^{2n}+1}-\frac{1}{n}\int\frac{d(x^n)}{(x^{2n}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}(x^n)-\frac{1}{n}\left[\frac{x^n}{2(x^{2n}+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^n)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2n}\left[\operatorname{arc\,tg}(x^n)-\frac{x^n}{x^{2n}+1}\right]+C.$$

当 $n=0$时，

$$\int\frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C.$$

*) 利用1817题的结果。

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)}$.

解 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\int \frac{d(x^{10}+2)}{x^{10}+2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{20}\ln(x^{10}+2) + C$$

$$= \frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+2} + C.$$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$.

解 由于

$$\frac{1}{x(x^{10}+1)^2} = \frac{x^{10}+1-x^{10}}{x(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x^{10}+1)} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2},$$

所以

$$\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2} = \int\left[\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10}+1} - \frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}\right]dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{x^{10}+1} - \frac{1}{10}\int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C.$$

1915. $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx.$

解 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{2x^6}{1+x^7}\right)dx$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\int\frac{d(1+x^7)}{1+x^7}$$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x|^7}{(1+x^7)^2}+C.$$

1916. $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx.$

解 $\int\frac{x^4-1}{x(x^4-5)(x^5-5x+1)}dx$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{(x^5-5x)(x^5-5x+1)}$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5-5x}-\frac{1}{x^5-5x+1}\right)d(x^5-5x)$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x)}{x^5-5x}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x^5-5x+1)}{x^5-5x+1}$$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x(x^4-5)}{x^5-5x+1}\right|+C.$$

1917. $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx.$

解 由于

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}$$

$$=\frac{x^2+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2+x+1}\right),$$

所以

$$\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$$

1918. $\int\frac{x^2-1}{x^4+x+x^2+x+1}dx.$

解 $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$

$$=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1}$$

$$=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)-1}=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\right]^2-\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

1919. $\int\frac{x^5-x}{x^8+1}dx$.

解 $\int\frac{x^5-x}{x^8+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2)^2-1}{(x^2)^4+1}d(x^2)$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}{}^{*)}+C.$$

*) 利用1713题的结果。

1920. $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx$.

解 $\int\frac{x^4+1}{x^6+1}dx=\int\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{x^6+1}dx$

$$=\int\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}dx+\int\frac{x^2dx}{x^6+1}$$

$$=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3)}{(x^3)^2+1}$$

$$=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)+C.$$

1921. 试导出计算积分

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\ (a\neq 0)$$

的递推公式。

利用这个公式计算

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}.$$

解 由于

$4a(ax^2+bx+c)=(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=t^2+\Delta$，

其中$t=2ax+b$，$\Delta=4ac-b^2$。于是

$$I_n=\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{(4a)^ndx}{[(2ax+b)^2+\Delta]^n}$$

$$=2^{2n-1}a^{n-1}\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}.$$

当$\Delta\neq 0$时，对于积分$\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}$施用分部积分法，即有

$$\int\frac{dt}{(t^2+\Delta)^n}=\frac{t}{(t^2+\Delta)^n}+2n\int\frac{t^2dt}{(t^2+\Delta)^{n+1}}$$

$$=\frac{t}{(t^2+\varDelta)^n}+2n\int\frac{(t^2+\varDelta)-\varDelta}{(t^2+\varDelta)^{n+1}}dt$$

$$=\frac{t}{(t^2+\varDelta)^n}+2n\int\frac{dt}{(t^2+\varDelta)^n}-2n\varDelta\int\frac{dt}{(t^2+\varDelta)^{n+1}}.$$

若令$\bar{I}_n=\int\frac{dt}{(t^2+\varDelta)^n}$，则得

$$\bar{I}_n=\frac{t}{(t^2+\varDelta)^n}+2n\bar{I}_n-2n\varDelta\,\bar{I}_{n+1},$$

或 $$\bar{I}_{n+1}=\frac{1}{2n\varDelta}\cdot\frac{t}{(t^2+\varDelta)^n}+\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{\varDelta}\cdot\bar{I}_n,$$

从而$$\bar{I}_n=\frac{1}{2(n-1)\varDelta}\cdot\frac{t}{(t^2+\varDelta)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\varDelta}\bar{I}_{n-1}.$$

代入I_n，即得

$$I_n=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\cdot\left\{\frac{1}{2(n-1)\varDelta}\cdot\frac{t}{(t^2+\varDelta)^{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\varDelta}\cdot\bar{I}_{n-1}\right\}$$

$$=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\left\{\frac{1}{2(n-1)\varDelta}\cdot\frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{1}{\varDelta}\cdot\frac{2a}{(4a)^{n-1}}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{(n-1)\varDelta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\varDelta}I_{n-1},$$

最后得递推公式

$$I_n=\frac{1}{(n-1)\Delta}\cdot\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1}.$$

当$\Delta=0$时，则有

$$I_n=\int\frac{(4a)^n dx}{(2ax+b)^{2n}}=2^{2n-1}\cdot a^{n-1}\int\frac{d(2ax+b)}{(2ax+b)^{2n}}$$

$$=\frac{1}{a^n(1-2n)}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{1-2n}+C.$$

对于I_3，$\Delta\neq0$，两次运用上述递推公式，即得

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^3}=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}$$

$$+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

1922. 利用代换 $t=\dfrac{x+a}{x+b}$ 来计算积分：

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^m(x+b)^n}.$$

(m及n为自然数)。

利用这个代换，求

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

解 设$t=\frac{x+a}{x+b}$,则$1-t=\frac{b-a}{x+b}$或$x+b=\frac{b-a}{1-t}$,

$dt=\frac{b-a}{(x+b)^2}dx=\frac{(1-t)^2}{b-a}dx$或$dx=\frac{b-a}{(1-t)^2}dt$,

及$x+a=t(x+b)=\frac{t(b-a)}{1-t}$。

代入I,即得

$$I=\frac{1}{(b-a)^{m+n-1}}\int\frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m}dt \quad (a\neq b).$$

将$(1-t)^{m+n-2}$展开，即可分项积分求得I。

如果$b=a$，则

$$I=\int\frac{dx}{(x+a)^{m+n}}=\frac{1}{1-m-n}(x+a)^{1-m-n}+C.$$

令$a=-2,b=3$，$m=2$ 及 $n=3$,并设 $t=\frac{x-2}{x+3}$,

即得

$$\int\frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{5^4}\int\frac{(1-t)^3}{t^2}dt$$

$$=\frac{1}{5^4}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3-t\right)dt$$

$$=\frac{1}{625}\left(-\frac{1}{t}-3\ln|t|+3t-\frac{t^2}{2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{625}\left[-\frac{x+3}{x-2}-3\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+\frac{3(x-2)}{x+3}\right.$$

$$-\frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2}\Big]+C.$$

1923. 若$P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，计算

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

解 由于$P_n(x)$为 x 的 n 次多项式，故得

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

其中$P_n^{(0)}(a)=P_n(a)$，$0!=1$.

于是，

$$\int\frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}P_n^{(k)}(a)\int\frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\int\frac{dx}{x-a}$$

$$=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}$$

$$+\frac{1}{n!}P_n^{(n)}(a)\ln|x-a|+C,$$

其中$\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}=a_0$为$P_n(x)$的首项系数，即

$$P_n(x)=a_0(x-a)^n+a_1(x-a)^{n-1}+\cdots$$
$$+a_{n-1}(x-a)+a_n.$$

1924⁺. 设$R(x)=R^*(x^2)$，其中 R^* 为有理函数，则函数 $R(x)$分解为有理分式时有甚么特性？

解 设$R^*(x)=P(x)+H(x)$，

其中$P(x)$是多项式；若$R^*(x)$本身也为多项式时，则$H(x)\equiv 0$；否则$H(x)=\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$是真分式，而$P_1(x)$，$Q_1(x)$也均为多项式。

设$Q_1(x)$有非负实根为a_i^2，其重数为α_i（$i=1, 2, \cdots, m$）；负根为$-b_k^2$，其重数为β_k（$k=1, 2, \cdots, t$）；二次因式为$x^2+C_px+D_p$，其重数为ν_p（$p=1, 2, \cdots, s$）。其中$C_p^2-4D_p<0$，于是，

$$Q_1(x)=\begin{cases} a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px \\ \qquad +D_p)^{\nu_p}，当m\neq 0，t\neq 0，s\neq 0时； \\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}\cdot\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}，当m=0, \\ \qquad t\neq 0，s\neq 0时； \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}，当m\neq 0, \\ \qquad t=0，s\neq 0时； \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}\cdot\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}，当m\neq 0, t\neq 0, \\ \qquad s=0时； \\ a_0\prod\limits_{i=1}^{m}(x-a_i^2)^{\alpha_i}，当m\neq 0，t=0，s=0时； \\ a_0\prod\limits_{k=1}^{t}(x+b_k^2)^{\beta_k}，当m=0，t\neq 0，s=0时； \\ a_0\prod\limits_{p=1}^{s}(x^2+C_px+D_p)^{\nu_p}，当m=0, t=0，s\neq 0时； \end{cases}$$

以下就$Q_1(x)$表达式中的第一种情形予以论证。

由$C_p^2-4D_p<0$，必有

$x^4+C_px^2+D_p=(x^2+E_px+F_p)\cdot(x^2-E_px+F_p)$

$(p=1,2,\cdots,s)$，则此时有

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{\alpha_i}(x+a_i)^{\alpha_i}\cdot\prod_{k=1}^{t}(x^2+b_k^2)^{\beta_k}$$

$$\cdot\prod_{p=1}^{s}(x^2+E_px+F_p)^{\gamma_p}(x^2-E_px+F_p)^{\gamma_p}$$，以及

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\alpha_i}\left[\frac{A_{il}}{(a_i-x)^l}+\frac{A'_{il}}{(a_i+x)^l}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{B_{kl}x+C_{kl}}{(x^2+b_k^2)^l}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pl}x+N_{pl}}{(x^2+E_px+F_p)^l}\right.$$

$$\left.+\frac{M'_{pl}x+N'_{pl}}{(x^2-E_px+F_p)^l}\right].$$

显然有$H(x^2)=H((-x)^2)$，由$H(x^2)$的分解式的唯一性，比较系数，即得常数关系为：

$A'_{il_1}=A_{il_1}$，$M'_{pl_2}=-M_{pl_2}$，$N'_{pl_2}=N_{pl_2}$，$B_{kl_3}=0$，

$(l_1=1,2,\cdots,\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,m;\ l_2=1,2,\cdots,\gamma_p,$
$p=1,2,\cdots,s;\ l_3=1,2,\cdots,\beta_k,\ k=1,2,\cdots,t)$。最后得

$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=$$

$$=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{\alpha_i}A_{il}\left[\frac{1}{(a_i-x)^l}+\frac{1}{(a_i+x)^l}\right]$$

$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{C_{kl}}{(x^2+b_k^2)^l}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{\gamma_p}\left[\frac{M_{pl}x+N_{pl}}{(x^2+E_px+F_p)^l}\right.$$

$$\left.-\frac{M_{pl}x-N_{pl}}{(x^2-E_px+F_p)^l}\right].$$

如若$H(x)\neq 0$，而 $m=0$，但 $t\neq 0$，$s\neq 0$时，则在上述表达式中就应缺乏第二项的和式，形如

$$R(x)=P(x^2)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l=1}^{p_k}+\sum_{p=1}^{s}\sum_{l=1}^{s_p},$$

其它情形可以类似推演，此处不再一一细叙。至于当$H(x)\equiv 0$时，当然有$R(x)=P(x^2)$。

另外，本题也可在复数域上作分解考虑。

仍记$R^*(x)=P(x)+H(x)$，其中$P(x)$为多项式，而$H(x)$要么是零（当$R^*(x)$为多项式时），要么是一个真分式。例如 $H(x)\neq 0$ 时，记 $H(x)=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$是其真分式。$P_1(x)$，$Q_1(x)$为多项式。若记$Q_1(x)$在复数域中的根为$a_i$，其相应重数记为$n_i$（$i=1,2,\cdots,m$；显然$m\geq 1$）。即

$$Q_1(x)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)^{n_i},$$

那么$Q_1(x^2)$中的每一项x^2-a_i可分解为一次式乘积

$$x^2-a_i=(x-b_i)(x+b_i),$$

于是

$$Q_1(x^2)=a_0\prod_{i=1}^{m}(x-b_i)^{n_i}(x+b_i)^{n_i}.$$

相应地有

$$H(x^2)=\frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{B_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{B'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right],$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(x-b_i)^k}+\frac{A'_{ik}}{(x+b_i)^k}\right].$$

由$H(x^2)=H((-x)^2)$，从$H(x^2)$的分解式的唯一

性，比较系数，即得 $A'_{ik}=A_{ik}(k=1,2,\cdots,n_i;$ $i=1,2,\cdots,m)$.最后得到

$$R(x)=P(x^2)+H(x^2)=P(x^2)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n_i}\left[\frac{A_{ik}}{(b_i-x)^k}+\frac{A_{ik}}{(b_i+x)^k}\right],$$

其中b_i为分母 $Q_1(x^2)$ 的根，A_{ik}为常系数。

1925. 计算

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数。

解 先将被积函数分解成部分分式之和，我们可以证明

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

事实上，记多项式$x^{2n}+1$的$2n$个根为 $a_k(k=1,2,\cdots,2n)$，显然$a_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+j\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$，其中$j=\sqrt{-1}$为虚数单位。

于是，$|a_k|=1$，$a_k^{2n}=-1$，$\bar{a}_k=a_{2n-k+1}$，

$$a_k\cdot\bar{a}_k=1,\quad a_k+\bar{a}_k=2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi.$$

设 $\frac{1}{1+x^{2n}}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k}{x-a_k}$,

即 $1=\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-a_k}$

令$x \to \alpha_i$并应用洛比塔法则，即得

$$1=\lim_{x\to\alpha_i}\sum_{k=1}^{2n}\frac{A_k(1+x^{2n})}{x-\alpha_k}=\lim_{x\to\alpha_i}\frac{A_i(1+x^{2n})}{x-\alpha_i}$$

$$=\lim_{x\to\alpha_i}(2nA_ix^{2n-1})$$

$$=2nA_i\cdot\frac{\alpha_i^{2n}}{\alpha_i}=-\frac{2nA_i}{\alpha_i}\quad(i=1,2,\cdots,2n),$$

即 $A_k=-\dfrac{\alpha_k}{2n}\quad(k=1,2,\cdots,2n)$。

于是，

$$\frac{1}{1+x^{2n}}=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha_k}{x-\alpha_k}+\frac{\bar{\alpha}_k}{x-\bar{\alpha}_k}\right)$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x-2\alpha_k\bar{\alpha}_k}{x^2-(\alpha_k+\bar{\alpha}_k)x+\alpha_k\cdot\bar{\alpha}_k}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}.$$

最后得到

$$\int\frac{dx}{1+x^{2n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int\frac{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{2x-2\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1}dx\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\int\frac{dx}{\left(x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)^2+\sin^2\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]$$

$$=-\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\ln\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right)\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{x-\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}\right]+C.$$

§3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数，以求下列积分：

1926. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$dx=2tdt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=2\int\frac{tdt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=2[t-\ln(1+t)]+C=2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C.$$

1927. $\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$.

解 设$\sqrt[6]{x}=t$，则$x=t^6$，$dx=6t^5dt$。

代入得

$$\int\frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}=6\int\frac{dt}{t(1+2t^3+t^2)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(1+t)(2t^2-t+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)}\right]dt$$

$$=6\left\{\ln t-\frac{1}{4}\ln(1+t)-\frac{3}{8}\int\frac{4t-1}{2t^2-t+1}dt\right.$$

$$\left.-\frac{1}{16}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{4}\right)}{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}}\right\}$$

$$=6\left\{\ln|t|-\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{3}{8}\ln(2t^2-t+1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}\right\}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{t^8}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4t-1}{\sqrt{7}}+C$$

$$=\frac{3}{4}\ln\frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[6]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}+1)^3}$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{7}}+C.$$

1928⁺. $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx$.

解 设$\sqrt[3]{2+x}=t$，则$x=t^3-2$，$dx=3t^2dt$。

代入得

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}dx=3\int \frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}dt$$

$$=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{t^3+t-2}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+3\int\left[-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{\frac{5}{4}t-\frac{1}{2}}{t^2+t+2}\right]dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|$$

$$+\frac{15}{8}\int\frac{2t+1}{t^2+t+2}dt-\frac{27}{8}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)$$

$$-\frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{2+x}$。

1929. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

解 设$\sqrt[6]{x+1}=t$，则$x=t^6-1$，$dx=6t^5dt$。

代入得

$$\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx=6\int\frac{t^5(1-t^3)}{1+t^2}dt$$

$$=6\int\left(-t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{1+t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{6}{7}t^7+\frac{6}{5}t^5+\frac{3}{2}t^4-2t^3-3t^2+6t$$

$$+3\ln(1+t^2)-6\text{arc tg}t+C,$$

其中$t=\sqrt[6]{x+1}$。

1930. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}$。

解 设$\sqrt[4]{x}=t$，则$x=t^4$，$dx=4t^3dt$。

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^3}=4\int\frac{tdt}{(1+t)^3}$$

$$=4\int\left[\frac{1}{(1+t)^2}-\frac{1}{(1+t)^3}\right]dt$$

$$=-\frac{4}{1+t}+\frac{2}{(1+t)^2}+C$$

$$=\frac{2}{(1+\sqrt[4]{x})^2}-\frac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C.$$

1931. $\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$.

解 设$\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^2+1}{t^2-1},\quad dx=-\frac{4t}{(t^2-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1}\,dx$$

$$=-4\int\frac{t\,dt}{(t-1)(t+1)^3}$$

$$=\int\left[-\frac{2}{(t+1)^3}+\frac{1}{(t+1)^2}+\frac{1}{2(t+1)}-\frac{1}{2(t-1)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C_1$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

如果不限制将被积函数化为有理函数，本题的解法可简单些。事实上，

$$\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(x+1)-(x-1)}dx$$

$$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

解 设$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$，则

$$x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx=-\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=-\frac{3}{2}\int dt=-\frac{3}{2}t+C$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

1933. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$ $(a>0)$.

解 设$\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}=t$，则$x=\frac{a}{1+t^4}$，

$$dx=-\frac{4at^3}{(1+t^4)^2}dt.$$

代入得

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}=-4a\int \frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=-4a\int\left[\frac{t}{(t^2-t\sqrt{2}+1)(t^2+t\sqrt{2}+1)}\right]^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}-\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right)^2dt$$

$$=-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}$$

$$+a\int\frac{dt}{t^4+1}.$$

现在分别求上述积分，利用1921题的递推公式，即得

$$\int\frac{dt}{(t^2-t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\int\frac{dt}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}t-1)+C_1$$

及

$$\int\frac{dt}{(t^2+t\sqrt{2}+1)^2}=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\int\frac{dt}{t^2+t\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\int\frac{d\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}+\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}t+1)+C_2.$$

利用1884题的结果，即得

$$\int\frac{dt}{t^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C_3.$$

最后得到

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}=-\frac{a}{2}\Big[\frac{2t-\sqrt{2}}{2(t^2-t\sqrt{2}+1)}$$

$$+\frac{2t+\sqrt{2}}{2(t^2+t\sqrt{2}+1)}\Big]-\frac{a\sqrt{2}}{2}\Big[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1)$$

$$+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1)\Big]+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)+C_4$$

$$=-\frac{at^3}{1+t^4}+\frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{a}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$ $(0<x<a)$。

1934. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ （n为自然数）。

解 当$a=b$时，显然被积函数为$(x-a)^{-2}$，因此积分为$-\frac{1}{x-a}+C$；当$a\neq b$时，设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}=t$，则

$$x=a+\frac{a-b}{t^n-1}, \quad dx=-\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n-1)^2}dt,$$

$$x-a=\frac{a-b}{t^n-1}, \quad x-b=\frac{(a-b)t^n}{t^n-1},$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}=-\frac{n}{a-b}\int dt$$

$$=-\frac{n}{a-b}t+C$$

$$=-\frac{n}{a-b}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C.$$

1935. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$.

解 设$\sqrt{x}=\frac{t^2-1}{2t}$并限制$t>1$，则

$$x=\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2, \quad dx=\frac{t^4-1}{2t^3}dt, \quad \sqrt{x+1}=\frac{t^2+1}{2t},$$

$$t=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2}\int \frac{t^4-1}{t^3(t+1)}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t-\ln t-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

$$+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}+C.$$

1936. 证明：若

$$p+q=kn,$$

式中 k 为整数，则积分

$$\int R\left[x,(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

（式中R为有理函数及p,q，n为整数）为初等函数。

证 当$a=b$时，$(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}=(x-a)^k$，则积分显然为初等函数。

当$a\neq b$时，设$\frac{x-a}{x-b}=y(\neq 1)$，则

$$x=\frac{a-by}{1-y}, \quad dx=\frac{a-b}{(1-y)^2}dy,$$

$$x-a=\frac{(a-b)y}{1-y},\quad x-b=\frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$=(a-b)\int R\left[\frac{a-by}{1-y},\ y^{\frac{p}{n}}\left(\frac{a-b}{1-y}\right)^{k}\right]\frac{dy}{(1-y)^{2}}.$$

再设$\sqrt[n]{y}=t$，则$y=t^{n}$，$dy=nt^{n-1}dt$。从而上述积分化为

$$\int R\left[x,\ (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$

$$=n(a-b)\int R\left[\frac{a-bt^{n}}{1-t^{n}},\ t^{p}\left(\frac{a-b}{1-t^{n}}\right)^{k}\right]\frac{t^{n-1}}{(1-t^{n})^{2}}dt,$$

因为被积函数为 t 的有理函数，所以积分是初等函数。

求最简单二次无理式的积分：

1937. $\int\frac{x^{2}}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx$。

解 $\int\frac{x^{2}}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx=\int\frac{x^{2}+x+1}{\sqrt{x^{2}+x+1}}dx$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^{2}}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+x+x^{2}}}$$

$$=\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2}+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x+x^{2})}{\sqrt{1+x+x^{2}}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{2x+1}{4}\sqrt{1+x+x^2}+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)$$

$$-\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C.$$

1938⁺. $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设$x+1=\frac{1}{t}$，则

$$x=\frac{1-t}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|}=sgnt\cdot\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}=-sgnt\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-sgnt\cdot\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_1$$

$$=-sgn(x+1)\cdot\ln\left|\frac{1-x+2[sgn(x+1)]\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right|+C_1.$$

当$x+1>0$时，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C;$$

当$x+1<0$时，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\ln\left|\frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\ln\left|\frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

总之，

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

1939. $\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$.

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t$,则

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=-\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt,$$

$$1-x=\frac{2t^2}{1+t^2},\quad \sqrt{1-x^2}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{t^4}dt$$

$$=\frac{1}{6t^3}+\frac{1}{2t}+C$$

$$=\frac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C.$$

1940. $\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

解 设$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$,则

$$x=\frac{t^2-2}{2(t+1)},\quad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2}dt,$$

$$\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+2t+2}{2(t+1)}.$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(t^2+2t+2)^2}{(t^2-2)(t+1)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\Big[1+\frac{2}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\Big]dt$$

$$=\frac{t}{2}+\ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}-\sqrt{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right|+C_1$$

$$=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$$

$$-\sqrt{2}\ln\left|\frac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C.$$

1941. $\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$.

解 设$1+x=\frac{1}{t}$，则

$$x=\frac{1-t}{t},\quad dx=-\frac{1}{t^2}dt,$$

$$\sqrt{1-x-x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{|t|}=sgn t\frac{\sqrt{t^2+t-1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}-\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x-x^2}}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}+sgn t\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t-1}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+[sgn(1+x)]$$

$$\cdot \ln\left|\frac{3+x+2(sgn(x+1))\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1.$$

当$x+1>0$时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C;$$

当$x+1<0$时，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$-\ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right|+C_1$$

$$=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

总之，

$$\int\frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}=\arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+\ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C.$$

以后诸题中，出现二次无理式时也会碰到用 *sgnt* 的问题，可参照1938题及1941题类似地处理。在解这类习题时，不妨就开方后取正值求解。如无特殊情况，今后不再另加说明。

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$.

解 $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

$$= -\int \sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$+2\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{5}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$+2\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$= \frac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\frac{11}{8}\arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y}dx = Q_{n-1}(x)y+\lambda\int \frac{dx}{y},$$

式中 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，$P_n(x)$ 为 n 次多项式，$Q_{n-1}(x)$为$n-1$次多项式及λ为常数，求下列积分：

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解 设$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{1+2x-x^2}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},$$

两边对 x 求导数，得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}=(2ax+b)\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+\frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3\equiv(2ax+b)(1+2x-x^2)+(ax^2+bx+c)\cdot(1-x)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此， $a=-\frac{1}{3}$， $b=-\frac{5}{6}$，$c=-\frac{19}{6}$， $\lambda=4$.

于是，

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+4\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\frac{19+5x+2x^2}{6}\sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+4\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

1944. $\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

解 设$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5$

$+fx^4+gx^3+hx^2+lx+m)\sqrt{1+x^2}$

$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

从而有

$$x^{10}\equiv(9ax^8+8bx^7+7cx^6+6dx^5+5ex^4+4fx^3$$
$$+3gx^2+2hx+l)(1+x^2)$$
$$+x(ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5+fx^4+gx^3$$
$$+hx^2+lx+m)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{10},b=0,\ c=-\frac{9}{80},d=0,$$

$$e=\frac{21}{160},f=0,g=-\frac{21}{128},\ h=0,$$

$$l=\frac{63}{256},m=0,\lambda=-\frac{63}{256}.$$

于是，

$$\int\frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left(\frac{63}{256}x-\frac{21}{128}x^3+\frac{21}{160}x^5-\frac{9}{80}x^7\right.$$

$$+\frac{1}{10}x^9\Big)\sqrt{1+x^2}-\frac{63}{256}\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

1945. $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

解 $\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{x^4(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$$=(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

从而有

$$x^4(a^2-x^2)\equiv(5Ax^4+4Bx^3+3Cx^2+2Dx+E)(a^2-x^2)-x(Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$A=\frac{1}{6},B=0,C=-\frac{a^2}{24},\ D=0,$$

$$E=-\frac{a^4}{16},\ F=0,\ \lambda=\frac{a^4}{16}.$$

于是，

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\Big(\frac{1}{6}x^5-\frac{a^2}{24}x^3-\frac{a^4}{16}x\Big)\sqrt{a^2-x^2}$$

$$+\frac{a^4}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C\quad(a\neq0).$$

1946. $\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$.

解 设$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$

$$=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+4x+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}},$$

从而有

$$x^3-6x^2+11x-6\equiv(2ax+b)(x^2+4x+3)$$
$$+(x+2)(ax^2+bx+c)+\lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{3},\quad b=-\frac{14}{3},c=37,\lambda=-66.$$

于是，

$$\int\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$$

$$=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{14}{3}x+37\right)\sqrt{x^2+4x+3}$$

$$-66\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}|+C.$$

1947. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

解 设$x=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$，这里碰到二次无理式$\sqrt{x^2+1}$需引用$sgnt$的问题，不妨设

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\quad(t>0).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$= -\int \frac{(t^2+1)-1}{\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$= -\int \sqrt{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

$$= -\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{t^2+1}|$$

$$+\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C.$$

1948⁺. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

解 不妨设$x=\frac{1}{t}>0$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$。由$|x|>1$知必有$|t|<1$，则有

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \quad (0<t<1).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int \frac{t(1-t^2)-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$= \int t\sqrt{1-t^2}\,dt - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$+\frac{1}{2}\int(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-t^2)$$

$$=-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}+(1-t^2)^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1+2x^2}{3x^3}\sqrt{x^2-1}+C.$$

1949⁺. $\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}$.

解 设$x-1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设$t>0$，则有

$$\sqrt{x^2-3x+1}=\frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=-\int\frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}}dt$$

$$=(at+b)\sqrt{5t^2+5t+1}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},$$

从而

$$-t^2\equiv a(1+5t+5t^2)+\left(5t+\frac{5}{2}\right)(at+b)+\lambda.$$

比较等式两端t的同次幂系数，求得

$$a=-\frac{1}{10},\quad b=\frac{3}{20},\lambda=-\frac{11}{40}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x-1)^3\sqrt{x^2+3x+1}}=\left(-\frac{t}{10}+\frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2+5t+1}$$

$$-\frac{11}{40}\int\frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}}$$

$$=\frac{3-2t}{20}\sqrt{5t^2+5t+1}-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|t+\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.+\sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}}\right|+C_1$$

$$=\frac{3x-5}{20(x-1)^2}\sqrt{x^2+3x+1}$$

$$-\frac{11}{40\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1}\right|+C.$$

1950⁺. $\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

解 设$x+1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。先设$t>0$，则有

$$\sqrt{x^2+2x}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=(at^3+bt^2+ct+e)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

从而有

$$-t^4\equiv(3at^2+2bt+c)(1-t^2)-t(at^3$$
$$+bt^2+ct+e)+\lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数，求得

$$a=\frac{1}{4},\ b=0, c=\frac{3}{8},\ e=0,\ \lambda=-\frac{3}{8}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x+1)^6\sqrt{x^2+2x}}=\left(\frac{1}{4}t^3+\frac{3}{8}t\right)$$

$$\cdot\sqrt{1-t^2}-\frac{3}{8}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x+1}+C.$$

再设 $t<0$，则答案前一项不改变符号，但后一项要改变符号。因此，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}$$

$$-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C,$$

其中$x>0$或$x<-2$。

1951．在什么条件下，积分

$$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

是代数函数？

解 设$\int\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

$$=(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

从而有

$$a_1x^2+b_1x+c_1\equiv A(ax^2+bx+c)$$

$$+\ (ax+\frac{b}{2})(Ax+B)+\lambda.$$

比较等式两端x的同次幂系数，当$a\neq 0$时求得

$$A=\frac{a_1}{2a},\quad B=\frac{4ab_1-3a_1b}{4a^2},$$

$$\lambda=\frac{8a^2c_1+3a_1b^2-4a(a_1c+bb_1)}{8a^2}.$$

于是，当$a\neq 0$且$8a^2c_1+3a_1b^2=4a(a_1c+bb_1)$时，$\lambda=0$，积分为代数函数；当$a=0$时积分显然为代数函数。

要求积分$\int\frac{P(x)}{Q(x)y}dx$,式中$y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，应先分解有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$为最简分式。

1952. $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$

$$+\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

设$x-1=\frac{1}{t}$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$。不妨设$t>0$，则有

$$\sqrt{1+2x-x^2}=\frac{\sqrt{2t^2-1}}{t}.$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\frac{tdt}{\sqrt{2t^2-1}}-\int\frac{dt}{\sqrt{2t^2-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{2t^2-1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}|+C$$

$$=\frac{\sqrt{1+2x-x^2}}{2(1-x)}-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2}}{1-x}\right|+C.$$

1953. $\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$.

解 $$\int\frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$=\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2$.

对于I_1，设 $x+1=\frac{1}{t}$， 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t>0$，则有

$$\sqrt{x^2-x-1}=\frac{\sqrt{t^2-3t+1}}{t}.$$

代入I_1，得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-x-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3t+1}}$$

$$=-\ln\left|t-\frac{3}{2}+\sqrt{t^2-3t+1}\right|+C_1$$

$$=-\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|+C_2,$$

对于I_2，设$x-1=\frac{1}{t}$，同上可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C_3.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right|$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right)+C.$$

1954. $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx=\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{(x+1)^2-(x+1)+1}{(x+1)^2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$+\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}}=I_1-I_2+I_3.$$

对于I_1，显然有

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C_1;$$

对于 I_2，利用1938题的结果，即得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C_2;$$

对于I_3，设$x+1=\frac{1}{t}$，则$dx=-\frac{1}{t^2}dt$。不妨设 $t>0$。则有

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$I_3=-\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(2t-1)dt}{\sqrt{t^2-t+1}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=-\sqrt{t^2-t+1}-\frac{1}{2}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right|+C_3$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|$$

$$+C_4.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx$$

$$=\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C.$$

如用下述解法更简单些：

$$\int\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2}dx=-\int\sqrt{x^2+x+1}\ d\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}+\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|^{*)}+C.$$

*) 利用1938题的结果。

1955. $\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x^3}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$

$$=\int\frac{(x^3+1)-1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{x^2-x+1}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx-\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=-\int\sqrt{2-(x-1)^2}d(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$+3\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}}-I_1$$

$$=\frac{1-x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\sqrt{1+2x-x^2}+3\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1$$

$$=-\frac{x+1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}+2\arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)-I_1.$$

对于I_1，设$x+1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right)+C_1.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1+x}{2}\sqrt{1+2x-x^2}-2\arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)+C.$$

1956. $\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$.

解 $\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

$$=\int\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=\int\frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}-\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=2I_1-I_2.$$

对于I_1，设$x-2=\frac{1}{t}$，可得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=-\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)+C_1;$$

对于I_2，设$x-1=\frac{1}{t}$，可得

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-4x+3}}=\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{xdx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$$

$$=-2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right)-\frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1}+C,$$

其中$x<1$或$x>3$.

1957. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设$x=\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$dx=\cos t dt$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$.

代入得

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=\int\frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)}{(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)+C.$$

1958. $\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

解 当$x>1$时，设$x=\sec t$，并限制 $0<t<\frac{\pi}{2}$， 则

$dx=\sec t\cdot\mathrm{tg}t\,dt$，$\sqrt{x^2-1}=\mathrm{tg}t$。

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sec t\,dt}{1+\sec^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t+1}dt=\int\frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin t}{\sqrt{2}-\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

当$x<-1$时，仍设$x=\sec t$，但限制$\pi<t<\frac{3}{2}\pi$，经计算可获得同样的结果。

总之，当$|x|>1$时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}\right|+C.$$

1959. $\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$.

解 设$x=\operatorname{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$且$|t|\neq\frac{\pi}{4}$，则

$dx=\sec^2 t\,dt$，$\sqrt{1+x^2}=\sec t$.

代入得

$$\int\frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{\sec^2 t\,dt}{(1-\operatorname{tg}^4 t)\sec t}$$

$$=\int\frac{\cos^3 t\,dt}{1-2\sin^2 t}=\int\frac{1-\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1-2\sin^2 t}{1-2\sin^2 t}d(\sin t)+\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$$

$$+C\quad(|x|\neq 1).$$

1960. $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx$.

解 $\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\int\frac{(x^2+2)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$

$$=\int\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+2})+I_1.$$

对于I_1，设$x=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=\sqrt{2}\sec^2 t dt,\quad \sqrt{x^2+2}=\sqrt{2}\sec t.$$

代入得

$$I_1=\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int\frac{\sec t dt}{1+2\mathrm{tg}^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{1+\sin^2 t}=\mathrm{arctg}(\sin t)+C_1$$

$$=\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right)+C_1$$

$$=-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$$

$$-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}\right)+C.$$

化二次三项式为正则型，以计算下列积分：

1961. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

$$=\int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}}.$$

当 $x+\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{5}}{2}$时，设$x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，并限制$0<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$dx=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t\cdot \operatorname{tg} t\,dt,\quad \sqrt{x^2+x-1}=\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{tg} t,$$

$$x^2+x+1=\frac{1}{4}(5\sec^2 t+3).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=4\int \frac{\sec t\,dt}{5\sec^2 t+3}=4\int \frac{\cos t\,dt}{5+3\cos^2 t}$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(\sqrt{3}\sin t)}{(\sqrt{8})^2-(\sqrt{3}\sin t)^2}$$

$$=4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{8}}\ln\left|\frac{\sqrt{8}+\sqrt{3}\sin t}{\sqrt{8}-\sqrt{3}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

当$x+\frac{1}{2}<-\frac{\sqrt{5}}{2}$时， 仍设 $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sec t$，

但限制 $\pi< t <\frac{3}{2}\pi$.经计算可获同样的结果。

总之，当$|x+\frac{1}{2}|>\frac{\sqrt{5}}{2}$时，

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{(2x+1)\sqrt{2}+\sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2}-\sqrt{3(x^2+x-1)}}\right|+C.$$

1962. $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

解 $\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$

$$=\int\frac{(x-1)^2+2(x-1)+1}{[3+(x-1)^2]\sqrt{3-(x-1)^2}}dx.$$

设$x-1=\sqrt{3}\sin t$，并限制$-\frac{\pi}{2}< t <\frac{\pi}{2}$，则

$dx=\sqrt{3}\cos t dt$，$\sqrt{2+2x-x^2}=\sqrt{3}\cos t$.

代入得

$$\int\frac{x^2dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$=\int\frac{1+2\sqrt{3}\sin t+3\sin^2 t}{3(1+\sin^2 t)}dt$$

$$=\int dt+\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\sin^2 t}$$

$$=t-\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\cos t)}{2-\cos^2 t}-\frac{2}{3}\int\frac{d(\operatorname{tg} t)}{1+2\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=t-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\cos t}{\sqrt{2}-\cos t}\right|$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\ tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} t)+C$$

$$=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\ tg}\frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

1963. $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 $\int\frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\sqrt{x^2+x+1}}\ ^{*)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C$$

$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C。$$

*) 利用1781题的结果。

1964+. 利用线性分式的代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，计算积分：

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 线性分式的代换

$$x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$$

给出

$$x^2 \pm x+1=\frac{(\beta^2\pm\beta+1)t^2+[2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2]t+(\alpha^2\pm\alpha+1)}{(1+t)^2}.$$

要求 $2\alpha\beta\pm(\alpha+\beta)+2=0$ 即化成正则型。当 $\alpha+\beta=0$ 及 $\alpha\beta=-1$ 时即得上式。例如，取

$$\alpha=-1,\ \beta=1,$$

我们有

$$x=\frac{t-1}{1+t} \text{ 或 } t=\frac{1+x}{1-x},$$

$$dx=\frac{2dt}{(1+t)^2},\quad x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1},$$

其中不妨设$t+1>0$。

于是，

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=2\int\frac{t+1}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}dt$$

$$=2\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}+2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}$$

$$=2(I_1+I_2)。$$

对于I_1，设$u=\sqrt{1+3t^2}$，则

$$du=\frac{3tdt}{\sqrt{1+3t^2}}，\quad t^2+3=\frac{u^2+8}{3}。$$

代入得

$$I_1=\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=\int\frac{du}{u^2+8}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\ tg}\left(\frac{u}{2\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\ tg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(1-x)\sqrt{2}}\right]+C_1。$$

对于I_2，设$u=\frac{3t}{\sqrt{1+3t^2}}$，则

$$\frac{dt}{\sqrt{1+3t^2}}=\frac{du}{3-u^2}，\quad t^2+3=\frac{27-8u^2}{3(3-u^2)}，$$

代入得

$$I_2=\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{1+3t^2}}=3\int\frac{du}{27-8u^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}u}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3(x^2+x+1)}+(x+1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C_2.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x-1)\sqrt{2}}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3(x^2+x+1)}-(x+1)\sqrt{2}}\right|+C.$$

1965+. 求

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}.$$

解 此题与1964题均属于下述类型的积分

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

【参看微积分学教程（Г.М. 菲赫金哥尔茨）第二卷第一分册55页“272. 其它的计算方法”】

设 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，适当选择 α 与 β，使得在两个三

项式中同时消去一次项。为此，将 $x=\dfrac{\alpha+\beta t}{1+t}$ 分别代入 x^2+2 及$2x^2-2x+5$中，并令一次项的系数等于零，求得

$$\alpha=-1,\ \beta=2,$$

即设

$$x=\frac{2t-1}{1+t}.$$

从而有

$$dx=\frac{3}{(t+1)^2}dt,\quad x^2+2=\frac{3(2t^2+1)}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2-2x+5}=\frac{3\sqrt{t^2+1}}{|t+1|}.$$

以下不妨设 $t+1>0$.

代入得

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}dt$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}+\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$$

对于右端的第一个积分，设$u=\sqrt{t^2+1}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{tdt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{2u^2-1}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}u-1}{\sqrt{2}u+1}+C_1$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}+C_1.$$

对于右端的第二个积分，设$u=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$，代入后计算得

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{(2t^2+1)\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{du}{1+u^2}$$

$$=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}u+C_2=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2x^2-2x+5}}\right)+C_2$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C_3.$$

于是，最后得到

$$\int\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{2x^2-2x+5}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}+(x-2)}{\sqrt{2(2x^2-2x+5)}-(x-2)}$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2x^2-2x+5}}{x+1}\right)+C.$$

利用尤拉代换

(1)若$a>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+z$；

(2)若$c>0$，$\sqrt{ax^2+bx+c}=xz\pm\sqrt{c}$；

(3)$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=z(x-x_1)$。

以求下列积分：

1966. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

解 设$\sqrt{x^2+x+1}=z-x$，则

$$x=\frac{z^2-1}{1+2z},\quad dx=\frac{2(z^2+z+1)}{(1+2z)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+z+1}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}dz$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{4}{z}-\frac{3}{z+\frac{1}{2}}-\frac{3}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{\left|z+\frac{1}{2}\right|^3}+\frac{3}{4\left(z+\frac{1}{2}\right)}+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|2z+1|^3}+\frac{3}{2(2z+1)}+C,$$

其中$z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1967. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

解 设$\sqrt{1-2x-x^2}=xz-1$，则

$$z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x},\quad x=\frac{2(z-1)}{z^2+1},$$

$$dx=\frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}dz,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2}+1=\frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2+1}\right]dz$$

$$=\ln\left|\frac{z-1}{z}\right|-2\operatorname{arctg}z+C,$$

其中 $z=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1968. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$.

解 设$\sqrt{x^2-2x+2}=z-x$，则

$$x=\frac{z^2-2}{2(z-1)},\quad dx=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{z^2-2z+2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{(z^2-2)(z^2-2z+2)^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{[(z-1)^2+2(z-1)-1]\cdot[(z-1)^2+1]^2}{(z-1)^4}dz$$

$$=\frac{1}{8}\int\left\{\left[(z-1)^2-(z-1)^{-4}\right]\right.$$

$$+\left[2(z-1)+2(z-1)^{-3}\right]$$

$$\left.+\left[1-(z-1)^{-2}\right]+4(z-1)^{-1}\right\}d(z-1)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]\right.$$

$$+\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]$$

$$\left.+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+\frac{1}{2}\ln|z-1|+C,$$

其中$z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$。

1969. $\int\frac{x-\sqrt{x^2-3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$。

解 设$\sqrt{x^2+3x+2}=z(x+1)$，则

$$x=\frac{2-z^2}{z^2-1},dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

$$\sqrt{x^2+3x+2}=\frac{z}{z^2-1}.$$

代入得

$$\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

$$=\int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$=\int\left[-\frac{17}{108(z+1)}+\frac{5}{18(z+1)^2}+\frac{1}{3(z+1)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4(z-1)}-\frac{16}{27(z-2)}\right]dz$$

$$=-\frac{17}{108}\ln|z+1|-\frac{5}{18(z+1)}-\frac{1}{6(z+1)^2}$$

$$+\frac{3}{4}\ln|z-1|-\frac{16}{27}\ln|z-2|+C,$$

其中$z=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1970. $\displaystyle\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}$.

解 设$\sqrt{x(1+x)}=z+x$，则

$$x=\frac{z^2}{1-2z},\quad dx=\frac{2z(1-z)}{(1-2z)^2}dz,$$

$$1+\sqrt{x(1+x)}=\frac{1-z-z^2}{1-2z}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{[1+\sqrt{x(1+x)}]^2}=2\int\frac{z(1-z)}{(1-z-z^2)^2}dz$$

$$=2\int\frac{(1-z-z^2)+(2z+1)-2}{(1-z-z^2)^2}dz$$

$$=2\int\frac{dz}{1-z-z^2}-2\int\frac{d(1-z-z^2)}{(1-z-z^2)^2}$$

$$-4\int\frac{dz}{(1-z-z^2)^2}=2\int\frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$+\frac{2}{1-z-z^2}-4\left\{\frac{2z+1}{5(1-z-z^2)}+\frac{2}{5}\int\frac{d\left(z+\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right\}^{*)}$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+z+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-z-\frac{1}{2}}\right|$$

$$+\frac{2}{1-z-z^2}-\frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)}+C$$

$$=\frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2z+1}{\sqrt{5}-2z-1}\right|+\frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+C,$$

其中$z=\sqrt{x(1+x)}-x$。

*）利用1921题的递推公式。

利用各种方法，计算下列积分：

1971. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{(x^2+1)-(x^2-1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$=\frac{x}{4}\left(\sqrt{x^{2}+1}+\sqrt{x^{2}-1}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^{2}+1}}{x+\sqrt{x^{2}-1}}\right|+C.$$

1972. $\int\frac{xdx}{(1-x^{3})\sqrt{1-x^{2}}}$.

解 设$\frac{1+x}{1-x}=z$，则

$$x=\frac{z-1}{z+1}, \quad dx=\frac{2}{(z+1)^{2}}dz,$$

代入得

$$\int\frac{xdx}{(1-x^{3})\sqrt{1-x^{2}}}=\frac{1}{2}\int\frac{(z^{2}-1)dz}{\sqrt{z}\,(3z^{2}+1)}$$

$$=\int\frac{(z^{2}-1)d(\sqrt{z})}{3z^{2}+1}=\int\left[\frac{1}{3}-\frac{4}{3(3z^{2}+1)}\right]d(\sqrt{z})$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\int\frac{d(\sqrt[4]{3z^{2}})}{(\sqrt[4]{3z^{2}})^{4}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{4}{3\sqrt[4]{3}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^{2}}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^{2}}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^{2}}}{1-z\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{\sqrt{z}}{3}-\frac{1}{3\sqrt[4]{12}}\left[\ln\frac{z\sqrt{3}+\sqrt[4]{12z^{2}}+1}{z\sqrt{3}-\sqrt[4]{12z^{2}}+1}\right.$$

$$\left.-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{12z^{2}}}{z\sqrt{3}-1}\right)\right]+C,$$

其中$z=\frac{1+x}{1-x}$.

*) 利用1884题的结果。

1973. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{(\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})(-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}dx$$

$$=\int \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}+C.$$

1974. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

解 $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx$

$$=\int \frac{(x+\sqrt{1+x+x^2})(1+x-\sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2-(1+x+x^2)}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx-\ln|x|.$$

对于积分$\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx$，设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$dx=-\frac{1}{t^2}dt,\ \sqrt{1+x+x^2}=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}.$$

不妨设$t>0$，代入得

$$\int\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x}dx=-\int\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2}dt$$

$$=\int\sqrt{t^2+t+1}\,d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{2t+1}{t\sqrt{1+t+t^2}}dt$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\int\frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t\sqrt{1+t+t^2}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{1+t+t^2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(\frac{1}{t}\right)+1}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}\right)+C_1$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\ln\frac{2+x+2\sqrt{1+x+x^2}}{2x}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{2}+C_1.$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}$$

$$+\ln x+C.$$

于是，当$x>0$时，最后得到

$$\int\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}dx=\sqrt{x^2+x+1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2}+C,$$

当 $x<0$ 时，可获同样的结果。

1975. $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$

$$=\int\frac{\sqrt{x(x+1)}\cdot(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{(x+1)-x}dx$$

$$=\int[(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}]dx$$

$$=\int\left[x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-(x+1)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right]-\frac{2}{5}\left[(x+1)^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{5}{2}}\right]+C.$$

1976. $\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解 $$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=\int\frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}}$$

$$=\int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}}.$$

下面我们先考虑积分$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx$。设$x=\operatorname{tg}t$，

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则有$dx=\sec^2 t dt$。

代入得

$$\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=\int \frac{\operatorname{tg}^2 t-1}{\sec^4 t}\cdot\sec^2 t dt$$

$$=\int(\sin^2 t-\cos^2 t)dt=-\int\cos 2t dt$$

$$=-\frac{1}{2}\sin 2t+C_1=-\frac{x}{1+x^2}+C_1,$$

从而，可得$\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{1}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)$。

于是，

$$\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x^2}\right)+C.$$

1977. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx$.

解 仿照1976题，可得

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}dx=\int \frac{\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2-1)^2}}}dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+\sqrt{1+\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C.$$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

解 作变换$\frac{1}{x}=\sqrt{t}$ （这里设$x>0$，若$x<0$，则作变换$\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$。最后结果相同），则

$$dx=-\frac{1}{2t\sqrt{t}}dt,\sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C\quad(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}).$$

1979. $\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解 $$\int\frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}=\int\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^4+x^2+1}{x^4}}}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2(1+2x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1})}{2+x^2+2\sqrt{x^4+x^2+1}}+C.$$

1980. 证明积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

（式中R为有理函数）的求法，归结为有理函数的积分法。

证 当a，c中至少有一个为零时，则积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法。

当$a\neq 0$，$c\neq 0$时，设$\sqrt{ax+b}=z$，则

$$x=\frac{z^2-b}{a},\quad dx=\frac{2}{a}zdz,$$

$$\sqrt{cx+d}=\sqrt{\frac{c}{a}z^2+d-\frac{bc}{a}}=\sqrt{c_1z^2+d_1},$$

式中$c_1=\frac{c}{a}$, $d_1=d-\frac{bc}{a}$。

代入得

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax+b},\sqrt{cx+d}\right)dx$$

$$=\int R\left(\frac{z^2-b}{a},\ z,\ \sqrt{c_1z^2+d_1}\right)\frac{2}{a}zdz,$$

$$=\int R_1(z,\ \sqrt{c_1z^2+d_1})dz,$$

其中R_1为有理函数。

再设 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=\pm\sqrt{c_1}\ z+u$ ($c_1>0$) 或 $\sqrt{c_1z^2+d_1}=zu\pm\sqrt{d_1}$ ($d_1>0$) ——尤拉代换，就可将被积函数有理化。于是，积分

$$\int R(x,\ \sqrt{ax+b},\ \sqrt{cx+d})dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法。

二项微分式

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

（式中m, n和 p 为有理数）仅在下列三种情形可化为有理函数的积分（契比协夫定理）：

第一种情形，p为整数。假定 $x=z^N$，其中N 为分数 m 和 n 的公分母。

第二种情形，$\frac{m+1}{n}$为整数。假定$a+bx^n=z^N$，其中N为分数 p 的分母。

第三种情形，$\frac{m+1}{n}+p$ 为整数。利用 代 换：$ax^{-n}+b=z^N$，其中N为分数 p 的分母。

计算下列积分：

1981. $\int\sqrt{x^3+x^4}dx$。

解 $\sqrt{x^3+x^4}=x^{\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$，$m=\frac{3}{2}$，$n=1$，$p=\frac{1}{2}$；

$\frac{m+1}{n}+p=3$，这是二项微分式的第三种情形。

设$x^{-1}+1=z^2$，则

$$x=\frac{1}{z^2-1},\quad dx=-\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

$\sqrt{x^3+x^4}=\frac{z}{(z^2-1)^2}$（不妨设$z>0$，以下各题不再说明）。

代入得

$$\int\sqrt{x^3+x^4}dx=-2\int\frac{z^2}{(z^2-1)^4}dz$$

$$=-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^4}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=-2\left[-\frac{z}{6(z^2-1)^3}-\frac{5}{6}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}\right]^{*)}-2\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=\frac{z}{3(z^2-1)^3}-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{(z^2-1)^3}$$

$$=\frac{z}{3(z^2-1)^3}+\frac{z}{12(z^2-1)^2}-\frac{z}{8(z^2-1)}$$

$$+\frac{1}{16}\ln\frac{z+1}{z-1}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\frac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C'\ (x>0)。$$

*）利用1921题的结果。

1982. $\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$。

解 $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{3}})^{-2}$。 $m=\frac{1}{2}$， $n=\frac{1}{3}$, $p=-2$； p 为整数，这是二项微分式的第一种情形。

设$x=z^6$，则

$$dx=6z^5dz，\ \sqrt{x}=z^3，\ \sqrt[3]{x}=z^2。$$

代入得

$$\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int\frac{z^8}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=6\int\left[z^4-2z^2+3-\frac{4}{z^2+1}+\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]dz$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-24\operatorname{arc\ tg}z$$

$$+6\left[\frac{z}{2(z^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\ tg}z\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arc\ tg}(x^{\frac{1}{6}})+C.$$

*) 利用 1921 题的结果。

1983. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

解 $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=x(1+x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$，$m=1$，$n=\frac{2}{3}$，$p=-\frac{1}{2}$；

$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形。

设 $1+x^{\frac{2}{3}}=z^2$，则

$x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}}$， $dx=3z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}dz$。

代入得

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(z^2-1)^2dz$$

$$=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

其中 $z=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$。

1984. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}=x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，$m=5$，$n=2$，$p=-\frac{1}{2}$；

$\frac{m+1}{n}=3$，这是二项微分式的第二种情形。

设$\sqrt{1-x^2}=z$（不妨设$x>0$），则

$$x=\sqrt{1-z^2},\quad dx=-\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int(1-z^2)^2dz$$

$$=-z+\frac{2}{3}z^3-\frac{1}{5}z^5+C,$$

其中$z=\sqrt{1-x^2}$。

1985. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}=x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}$, $m=0$, $n=3$, $p=-\frac{1}{3}$;

$\frac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形。

设$x^{-3}+1=z^3$，则

$$x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}},\quad dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}=-\int\frac{z}{z^3-1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{dz}{z-1}+\frac{1}{3}\int\frac{z-1}{z^2+z+1}dz$$

$$=-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$。

1986. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$。

解 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}$，$m=0,n=4,p=-\frac{1}{4}$；

$\frac{m+1}{n}+p=0$，这是二项微分式的第三种情形。

设 $x^{-4}+1=z^4$，则

$$z=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\quad(z>0,\ x>0),$$

$$x=(z^4-1)^{-\frac{1}{4}},\ dx=-z^3(z^4-1)^{-\frac{5}{4}}dz.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2}{z^4-1}dz$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}z+C,$$

其中$z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$。

1987$^+$. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$.

解 $\dfrac{1}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}$, $m=-1$, $n=6$, $p=-\dfrac{1}{6}$; $\dfrac{m+1}{n}=0$，这是二项微分式的第二种情形。

设$1+x^6=z^6$，则

$z=\sqrt[6]{1+x^6}$ $(z>0, x>0)$,

$x=\sqrt[6]{z^6-1}$, $dx=z^5(z^6-1)^{-\frac{5}{6}}dz$.

代入得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}=\int\frac{z^4dz}{z^6-1}$$

$$=\int\left[-\frac{1}{6(z+1)}+\frac{z+1}{6(z^2-z+1)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6(z-1)}+\frac{-z+1}{6(z^2+z+1)}\right]dz$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{z-1}{z+1}+\frac{1}{12}\ln\frac{z^2-z+1}{z^2+z+1}$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中$z=\sqrt[6]{1+x^6}$。

1988. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$。

解 $\frac{1}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=x^{-3}(1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}, m=-3, n=-1,$

$p=-\frac{1}{5}$; $\frac{m+1}{n}=2$，这是二项微分式的第二种情形。

设$1+x^{-1}=z^5$，则

$x=(z^5-1)^{-1}, dx=-5z^4(z^5-1)^{-2}dz$。

代入得

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}=-5\int z^3(z^5-1)dz$$

$$=-\frac{5}{9}z^9+\frac{5}{4}z^4+C,$$

其中$z=\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}$。

1989. $\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$。

解 $\sqrt[3]{3x-x^3}=x^{\frac{1}{3}}(3-x^2)^{\frac{1}{3}}$。$m=\frac{1}{3}, n=2, p=\frac{1}{3}$;

$\frac{m+1}{n}+p=1$，这是二项微分式的第三种情形。

设$3x^{-2}-1=z^3$（不妨设$x>0$），则

$$z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x},\quad x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3+1}},$$

$$dx=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{z^2}{(z^3+1)^{\frac{3}{2}}}dz.$$

代入得

$$\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,dx=-\frac{9}{2}\int\frac{z^3}{(z^3+1)^2}dz$$

$$=-\frac{9}{2}\int\frac{dz}{z^3+1}+\frac{9}{2}\int\frac{dz}{(z^3+1)^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}$$

$$+\frac{9}{2}\left[\frac{z}{3(z^3+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{**)}+C$$

$$=\frac{3z}{2(z^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(z+1)^2}{z^2-z+1}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $z=\frac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}$.

*) 利用1881题的结果。

**) 利用1892题的结果。

1990. 在甚么情形下，积分

$$\int\sqrt{1+x^m}\,dx$$

（式中m为有理数）为初等函数？

解 $\sqrt{1+x^m}=x^0(1+x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于$p=\frac{1}{2}$，故由契比协夫定理知，仅在下述两种情形，此函数的积分可化为有理函数的积分。

第一种情形，$\frac{1}{m}$为整数，即 $m=\frac{1}{k_1}=\frac{2}{2k_1}$，其中 $k_1=\pm 1, \pm 2, \cdots$；

第二种情形，$\frac{1}{m}+\frac{1}{2}$为整数，即 $m=\frac{2}{2k_2-1}$，其中$k_2=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。

综上所述，即得：当

$$m=\frac{2}{k}$$

（式中 $k=\pm 1, \pm 2, \cdots$）时，积分

$$\int\sqrt{1+x^m}\,dx$$

为初等函数。

§4. 三角函数的积分法

形如

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$$

的积分（式中 m及 n为整数），可利用巧妙的变换或

运用递推公式计算。

求下列积分：

1991. $\int \cos^5 x dx$。

解 $\int \cos^6 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$$

$$= \int (1-2\sin^2 x+\sin^4 x) d(\sin x)$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

1992. $\int \sin^6 x dx$。

解 $\int \sin^6 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx$

$$= \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x) dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2} dx$$

$$- \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$$- \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x) d(\sin 2x)$$

$$= \frac{5x}{16} - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x$$

$-\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$

$=\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

1993. $\int \cos^6 x dx$.

解 $\int \cos^6 x dx=\int \sin^6\left(x-\frac{\pi}{2}\right)d\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{5}{16}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{3}{64}\sin 4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$+\frac{1}{48}\sin^3 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{*)}+C_1$

$=\frac{5x}{16}+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

*) 利用1992题的结果。

1994. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$.

解 $\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cos^2 x dx$

$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx$

$=\frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx+\frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x)$

$=\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$

1995. $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^4 x\cos^5 x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$= \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{7}\sin^7 x + \frac{1}{9}\sin^9 x + C.$

1996. $\int \sin^5 x\cos^5 x dx$.

解 $\int \sin^5 x\cos^5 x dx = \frac{1}{32}\int \sin^5 2x dx$

$= -\frac{1}{64}\int (1-\cos^2 2x)^2 d(\cos 2x)$

$= -\frac{1}{64}\cos 2x + \frac{1}{96}\cos^3 2x - \frac{1}{320}\cos^5 2x + C.$

1997. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

解 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x)$

$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$

1998. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx$.

解 $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} d(\sin x)$

$= -\frac{1}{2}\int \cos^3 x d\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

$= -\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2}\int \frac{\cos^2 x \sin x}{\sin^2 x} dx$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}dx$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{3}{2}\cos x+C.$$

1999. $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\int\frac{1}{\sin x}d(\operatorname{ctg}x)=-\frac{\operatorname{ctg}x}{\sin x}$

$$-\int\operatorname{ctg}x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}dx$$

$$=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\sin^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|,$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2000. $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$,

解 $\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$=-\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)\right|^{*)}+C$$

$$=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

*) 利用1999题的结果。

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} = 16\int \frac{dx}{\sin^4 2x}$

$= -8\int \csc^2 2x d(\operatorname{ctg} 2x)$

$= -8\int (1+\operatorname{ctg}^2 2x) d(\operatorname{ctg} 2x)$

$= -8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x + C$.

2002. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$.

解 $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} dx$

$= \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$.

$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^5 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx + 2\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

$+ 3\int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}-2\int\frac{d(\cos x)}{\cos^3 x}+3\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}+\int\frac{d(\sin x)}{\sin^3 x}$$

$$=\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}+3\ln|\operatorname{tg}x|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg}x|+C.$$

2003. $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^4 x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x}{\cos^4 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x\cos^2 x}$$

$$=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^4 x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx+\int\frac{dx}{\sin x}$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

$$=\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

2004. $\int\operatorname{tg}^5 x dx$.

解 $$\int\operatorname{tg}^5 x dx=\int\operatorname{tg}x(\sec^2 x-1)^2 dx$$

$$=\int\sec^4 x\operatorname{tg}x dx-2\int\sec^2 x\operatorname{tg}x dx+\int\operatorname{tg}x dx$$

$$=\int\sec^3 x d(\sec x)-2\int\sec x d(\sec x)-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x-\sec^2 x-\ln|\cos x|+C_1$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C.$$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$.

解 $\int \operatorname{ctg}^6 x dx=\int \operatorname{ctg}^2 x(\csc^2 x-1)^2 dx$

$$=\int \operatorname{ctg}^2 x\csc^4 x dx-2\int \operatorname{ctg}^2 x\csc^2 x dx+\int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$=-\int \operatorname{ctg}^2 x(1+\operatorname{ctg}^2 x)d(\operatorname{ctg} x)$$

$$+2\int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x)+\int(\csc^2 x-1)dx$$

$$=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C$$

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg} x-x+C.$$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx$.

解 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}dx=\int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+C.$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$.

解 $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=\int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}=$

$$+\int\frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}}$$

$$=\int\sqrt{\operatorname{tg}x}\,d(\operatorname{tg}x)-\int\frac{d(\operatorname{ctg}x)}{\sqrt{\operatorname{ctg}x}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+C.$$

2008⁺. $\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

解 设$t=\sqrt[3]{\sin x}$，不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况，即$-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}$且$x\neq 0$，则有

$$dx=\frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}}dt,\quad \cos x=\sqrt{1-t^6}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}=3\int\frac{dt}{1-t^6}$$

$$=\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{1-t^3}+\frac{1}{1+t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{t+2}{1+t+t^2}\right)dt+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1-t^3}$$

$$=\frac{-1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}+\frac{3}{4}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$+\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}\right)+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{\sin x}$。

*) 利用1881题的结果。

2009. $\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$。

解 设 $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$，则

$$x=\operatorname{arc\,tg}t^2,\quad dx=\frac{2t}{1+t^4}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}=2\int\frac{dt}{1+t^4}$$

$$=2\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}+C,$$

其中 $t=\sqrt{\operatorname{tg}x}$。

*) 利用1884题的结果。

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}$.

解 设$\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}=t$，则

$$x=\operatorname{arc\,tg}t^3,\quad dx=\frac{3t^2}{1+t^6}dt,$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}}=3\int\frac{tdt}{1+t^6}=\frac{3}{2}\int\frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3}$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C,$$

其中$t=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$.

*) 利用1881题的结果。

2011. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int\sin^n xdx$； (6) $K_n=\int\cos^n xdx$ $(n>2)$.

并利用推得的公式来计算

$$\int\sin^6 xdx \text{ 及 } \int\cos^8 xdx.$$

解 (a) $I_n=\int\sin^n xdx=-\int\sin^{n-1}xd(\cos x)$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\cos^2 x\sin^{n-2}xdx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}xdx$$

$$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}+(1-n)I_n,$$

于是，

$$I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_0=\int dx=x+C,$$

即得

$$I_6=\int\sin^6 x dx=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}+\frac{5}{6}I_4$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}+\frac{5}{8}I_2$$

$$=-\frac{\cos x\sin^5 x}{6}-\frac{5\cos x\sin^3 x}{24}$$

$$-\frac{5\cos x\sin x}{16}+\frac{5}{16}x+C.$$

(6) $K_n=\int\cos^n x dx=\int\cos^{n-1}x d(\sin x)$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)K_{n-2}-(n-1)K_n$$

于是，

$$K_n=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_0=x+C$$

即得

$$K_8=\int\cos^8 x dx=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{8}K_6=\cdots$$

$$=\frac{1}{8}\sin x\cos^7 x+\frac{7}{48}\sin x\cos^5 x+\frac{35}{192}\sin x\cos^3 x$$

$$+\frac{35}{128}\sin x\cos x+\frac{35}{128}x+C.$$

2012. 推出下列积分的递推公式

(a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$; (б) $K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}$ $(n>2)$.

并利用推得的公式计算

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}\text{及}\int\frac{dx}{\cos^7 x}.$$

解 (a) $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}dx$

$$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1}x}\right)$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_1=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C,$$

即得

$$I_5=\int\frac{dx}{\sin^5 x}=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}+\frac{3}{4}I_3=\cdots$$

$$=-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

(б) $$K_n=\int\frac{dx}{\cos^n x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^n x}dx$$

$$=\frac{1}{n-1}\int\sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1}x}\right)+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}K_{n-2}+K_{n-2}$$

$$=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_1=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,$$

即得

$$K_7=\int\frac{dx}{\cos^7 x}=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5}{6}K_5=\cdots$$

$$=\frac{\sin x}{6\cos^6 x}+\frac{5\sin x}{24\cos^4 x}+\frac{5\sin x}{16\cos^2 x}$$

$$+\frac{5}{16}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

运用公式

Ⅰ $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

Ⅱ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

Ⅲ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

来计算下列的积分。

求积分：

2013. $\int\sin5x\cos x dx$.

解 $\int\sin5x\cos x dx=\frac{1}{2}\int(\sin4x+\sin6x)dx$

$=-\frac{1}{8}\cos4x-\frac{1}{12}\cos6x+C$.

2014. $\int\cos x\cos2x\cos3x dx$.

解 $\int\cos x\cos2x\cos3x dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos2x(\cos4x+\cos2x)dx$

$=\frac{1}{4}\int(\cos6x+\cos2x)dx+\frac{1}{4}\int(1+\cos4x)dx$

$=\frac{1}{24}\sin6x+\frac{1}{8}\sin2x+\frac{1}{16}\sin4x+\frac{x}{4}+C$.

2015. $\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$.

解 $\int \sin x \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}dx$

$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{2}{3}x-\cos\frac{4}{3}x\right)\sin\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{2}{3}x\sin\frac{x}{2}dx-\frac{1}{2}\int\cos\frac{4}{3}x\sin\frac{x}{2}dx$

$=\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{7}{6}x-\sin\frac{1}{6}x\right)dx$

$-\frac{1}{4}\int\left(\sin\frac{11}{6}x-\sin\frac{5}{6}x\right)dx$

$=-\frac{3}{14}\cos\frac{7}{6}x+\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11}{6}x$

$-\frac{3}{10}\cos\frac{5}{6}x+C.$

2016. $\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$.

解 $\int\sin x\sin(x+a)\sin(x+b)dx$

$=\frac{1}{2}\int\sin x[\cos(a-b)-\cos(2x+a+b)]dx$

$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)-\frac{1}{4}\int[\sin(3x+a+b)$

$-\sin(x+a+b)]dx$

$=-\frac{1}{2}\cos x\cos(a-b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)$

$-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+C.$

2017. $\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx$.

解 $\int \cos^2 ax\cos^2 bx\,dx=\int (\cos ax\cos bx)^2dx$

$$=\frac{1}{4}\int [\cos(a-b)x+\cos(a+b)x]^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int [\cos^2(a-b)x+\cos^2(a+b)x$$

$$+2\cos(a-b)x\cos(a+b)x]dx.$$

$$=\frac{1}{8}\int [2+\cos 2(a+b)x+\cos 2(a-b)x]dx$$

$$+\frac{1}{4}\int (\cos 2ax+\cos 2bx)dx$$

$$=\frac{x}{4}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}$$

$$+\frac{1}{8a}\sin 2ax+\frac{1}{8b}\sin 2bx+C.$$

2018. $\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$.

解 先利用三角公式化简$\sin^3 2x\cos^2 3x$，得

$$\sin^3 2x\cos^2 3x=-\frac{1}{16}\sin 12x+\frac{3}{16}\sin 8x$$

$$-\frac{1}{8}\sin 6x-\frac{3}{16}\sin 4x+\frac{3}{8}\sin 2x,$$

于是

$$\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$$

$$=\frac{1}{192}\cos 12x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x$$

$$+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{16}\cos 2x+C.$$

运用恒等式

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

及 $$\cos(\alpha-\beta)=\cos[(x+\alpha)-(x+\beta)]$$

来计算积分.

求积分:

2019. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(a+x)-(x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}-\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C,$$

其中设$\sin(a-b)\neq 0$.

2020. $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C,$$

其中设$\cos(a-b)\neq 0$。

2021. $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$.

解 $\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin[(x+a)-(x+b)]dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\int\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)}-\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C,$$

其中设$\sin(a-b)\neq 0$*)。

*) 当$a-b=2k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$时，是更简单的积分，2019题及2020题与本题类似，解法从略。

2022. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}$.

解 $\int\frac{dx}{\sin x-\sin a}=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}-\frac{x-a}{2}\right)}{\sin x-\sin a}dx$

$$=\frac{1}{\cos a}\int\frac{\cos\frac{x+a}{2}\cos\frac{x-a}{2}+\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2\cos a}\int\left(\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}+\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中设$\cos a\neq 0$。

2023. $\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}$.

解 $$\int\frac{dx}{\cos x+\cos a}=\int\frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$=\frac{1}{\cos\left(a+\frac{3}{2}\pi\right)}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a-\pi}{2}}{\cos\frac{x+a+2\pi}{2}}\right|^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{\sin a}\ln\left|\frac{\cos\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C,$$

其中设$\sin a\neq 0$。

*） 利用2022题的结果。

2024. $\int \operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+a)dx$.

解 $\int \operatorname{tg}x\operatorname{tg}(x+a)\,dx=\int \frac{\sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$

$$=\int \frac{\cos x\cos(x+a)+\sin x\sin(x+a)-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$$

$$=\int \frac{\cos a-\cos x\cos(x+a)}{\cos x\cos(x+a)}dx$$

$$=-x+\cos a\cdot\int\frac{dx}{\cos(x+a)\cos x}$$

$$=-x+\operatorname{ctg}a\cdot\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x-a)}\right|^{*)}+C,$$

其中设$\sin a\neq 0$.

*) 利用2021题的结果.

形如

$$\int R(\sin x,\cos x)dx$$

(式中R为有理函数) 的积分的一般情形可利用代换$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x,\ \cos x)\equiv -R(\sin x,\ \cos x),$$

或 $$R(\sin x,\ -\cos x)\equiv -R(\sin x,\ \cos x)$$

成立，则最好利用代换$\cos x=t$或对应的 $\sin x=t$.

(б) 若等式

$$R(-\sin x,\ -\cos x)\equiv R(\sin x,\ \cos x)$$

成立，则最好利用代换$\operatorname{tg}x=t$.

求积分：

2025. $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

解 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

$dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

于是，

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int \frac{dt}{3t^2+2t+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.$$

2026. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 同2025题，得

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}=\int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)}dt$$

$$=\int\left[\frac{1}{3t}+\frac{2t}{3(3+t^2)}\right]dt$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t(3+t^2)|+C_1$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}{}^{*)}+C.$$

*) 由于

$$t(3+t^2)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\left(2+\sec^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}\left(1+2\cos^2\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\left(\frac{1-\cos x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}(\cos x+2)$$

$$=2\left[\frac{(1-\cos x)(\cos x+2)^2}{(1+\cos x)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

因而

$$\ln|t(3+t^2)|=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

2027. $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx.$

解 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，同2025题，得

$$\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx=4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)}$$

$$=\frac{4}{5}\int\left[\frac{1}{1+t^2}+\frac{-2+t}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{1+t-t^2}\right]dt$$

$$=\frac{4}{5}\int\frac{dt}{1+t^2}-\frac{8}{5}\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}+\frac{2}{5}\int\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{5}\text{arctg}\,t-\frac{8}{5}\left[\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\text{arc tg}\,t\right]^{*)}$$

$$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+t-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\left(t-\frac{1}{2}\right)}\right|+C_1$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)^{**)}$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\text{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\text{arctg}2}{2}\right)\right|^{***)}+C.$$

*) 利用1817题的结果。

**) $$-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2t}{1+t^2}=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\,\text{tg}\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$=-\frac{2}{5}\cdot\frac{1+2\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}}{\frac{2}{1+\cos x}}=-\frac{1}{5}(\cos x+2\sin x)-\frac{1}{5}.$$

***) $\ln\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+t}{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}-t}\right|=\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right|$

$$=\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right|+\ln\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)}$$

$$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right|-\ln\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right)\right].$$

2028. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$;

(a) $0<\varepsilon<1$; (б) $\varepsilon>1$.

解 设$t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.同2025题，得

$$\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}=2\int\frac{dt}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)t^2}=I.$$

(a) $0<\varepsilon<1$,

$$I=\frac{2}{1+\varepsilon}\int\frac{dt}{1+\left(\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)t^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C;$$

(б) $\varepsilon > 1$,

$$I=\frac{2}{\varepsilon-1}\int\frac{dt}{\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)-t^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\varepsilon+1}+\sqrt{\varepsilon-1}\,t}{\sqrt{\varepsilon+1}-\sqrt{\varepsilon-1}\,t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ln\left|\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{1+\varepsilon\cos x}\right|^{*)}+C.$$

$$*)\ \frac{\sqrt{\varepsilon+1}+t\sqrt{\varepsilon-1}}{\sqrt{\varepsilon+1}-t\sqrt{\varepsilon-1}}=\frac{\varepsilon+1+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}+(\varepsilon-1)t^2}{(\varepsilon+1)-(\varepsilon-1)t^2}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1-t^2)+2\sqrt{\varepsilon^2-1}\,t}{\varepsilon(1-t^2)+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon(1+t^2)+(1+t^2)\cos x+2t\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon(1+t^2)\cos x+(1+t^2)}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\varepsilon\cos x+1}$$

$$=\frac{\varepsilon+\cos x+\sqrt{\varepsilon^2-1}\sin x}{\varepsilon\cos x+1}.$$

2029. $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx.$

解 $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 x}\right)dx$

$$=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\sec^2 x+\operatorname{tg}^2 x}=x-\int\frac{d(\operatorname{tg}x)}{1+2\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + C.$$

2030. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

解 $$\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2}$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}x}{b}\right) + C,$$

其中设$ab \neq 0$。

2031. $\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2}$.

解 $$\int \frac{\cos^2 x\,dx}{(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(a\operatorname{tg}x)}{(a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}x}{2b^2(a^2\operatorname{tg}^2 x + b^2)} + \frac{1}{2ab^3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a\operatorname{tg}x}{b}\right)^{*)} + C,$$

其中设$ab \neq 0$。

*) 利用1921题的结果。

2032. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}dx$.

解 $$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x + \cos x}dx = \int \frac{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

2033. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a}\int \frac{d(a\operatorname{tg}x+b)}{(a\operatorname{tg}x+b)^2}$

$$=-\frac{1}{a\operatorname{tg}x+b}+C=-\frac{\cos x}{a(a\sin x+b\cos x)}+C.$$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

解 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int \frac{\sin x dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin x-\cos x)dx}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{-(\cos x-\sin x)dx}{\sin x+\cos x}$$

$$+\frac{1}{6}\int \frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin x\cos x}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-\sin x\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}+\frac{1}{6}\int\frac{d(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\int d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)$$

$$=-\frac{1}{6}\ln\frac{(\sin x+\cos x)^2}{1-\sin x\cos x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\sin x}\right)+C.$$

2035. $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\int\frac{2dx}{2-\sin^2 2x}$$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{2\sec^2 2x-\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$=\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{2+\operatorname{tg}^2 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

2036. $\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx$

解 $$\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx=\int\frac{2\sin^2 2x dx}{\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8}$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^4 2x-8\operatorname{tg}^2 2x\sec^2 2x+8\sec^4 2x}$$

$$=\int\frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^4 2x+8\operatorname{tg}^2 2x+8}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}(2+\sqrt{2})\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^2 2x+4+2\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}(2-\sqrt{2})\int\frac{d(\operatorname{tg}2x)}{\operatorname{tg}^2 2x+4-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sqrt{2+\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)\right.$$

$$\left.-\sqrt{2-\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)\right]+C.$$

2037. $\int\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx.$

解 $\int\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\sin^4x+\cos^4x}dx=-\int\frac{\cos2x}{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}dx$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{2\cos2x}{\sqrt{2}-\sin2x}+\frac{2\cos2x}{\sqrt{2}+\sin2x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-\sin2x}{\sqrt{2}+\sin2x}+C.$$

2038. $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx.$

解 $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4x}dx=\int\frac{\operatorname{tg}x\sec^2x}{\sec^4x+\operatorname{tg}^4x}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(\operatorname{tg}^2x)}{2\operatorname{tg}^4x+2\operatorname{tg}^2x+1}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1+2\operatorname{tg}^2x)+C.$$

2039. $\int\frac{dx}{\sin^6x+\cos^6x}.$

解 $$\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int \frac{dx}{1-3\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\int \frac{dx}{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}=\int \frac{2d(\operatorname{tg}2x)}{4\sec^2 2x-3\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{2}\right)+C.$$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$.

解 $$\int \frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}=\int \frac{\frac{1}{\cos^4 x}\,dx}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{\sec^2 x\,d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}d(\operatorname{tg}x)+\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+2)-2}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}d(\operatorname{tg}x)+\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x+2}-\int \frac{d(\operatorname{tg}x)}{(\operatorname{tg}^2 x+2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\operatorname{tg}x}{4(\operatorname{tg}^2 x+2)}$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}+C$$

$$=\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\operatorname{tg}x}{4(\operatorname{tg}^2x+2)}+C.$$

*）利用1817题的结果。

2041．求积分

$$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

先化分母为对数的形状。

解 $$\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int\frac{dx}{\sin(x+\varphi)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x+\varphi}{2}\right)\right|+C,$$

其中$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

并设$a^2+b^2\neq 0$。

2042．证明

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C,$$

式中A,B,C为常数。

证 $a_1\sin x+b_1\cos x=A(a\sin x+b\cos x)$
$+B(a\cos x-b\sin x)$，

式中$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$，$a^2+b^2\neq 0$。

于是

$$\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx=A\int dx$$

$$+B\int \frac{d(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

求积分：

2043. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx.$

解 此为2042题的特例，这里

$a_1=1$，$b_1=-1$，$a=1$，$b=2$；

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-2}{1+4}=-\frac{1}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{-1-2}{1+4}=-\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+2\cos x}dx=-\frac{x}{5}$$

$$-\frac{3}{5}\ln|\sin x+2\cos x|+C.$$

2044. $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x}.$

解 $\int \frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x}=\int \frac{\cos x}{5\sin x+3\cos x}dx.$

此为2042题的特例，这里

$a_1=0$，$b_1=1$，$a=5$，$b=3$；

$A=\frac{3}{34}$，$B=\frac{5}{34}$.

代入得

$$\int\frac{dx}{3+5\operatorname{tg}x}=\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|+C.$$

2045. $\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$.

解 仿2042题，$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$

$$=A\int\frac{a\sin x+b\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$+B\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$=A\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{A}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|^{*)}-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\varphi}{2}\right)\right|$$

$$-\frac{ab_1-a_1b}{(a^2+b^2)(a\sin x+b\cos x)}+C,$$

式中$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}$，$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}$，

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$a^2+b^2\neq 0$（显然按题意a,b不同时为零）。

*） 利用2041题的结果。

2046．证明：

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c},$$

式中A,B,C都是常系数。

证 按题意a、b不同时为零。设

$$a_1\sin x+b_1\cos x+c_1\equiv A(a\sin x+b\cos x+c)$$

$$+B(a\cos x-b\sin x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a\sin x+b\cos x+c}dx$$

$$=A\int dx+B\int\frac{d(a\sin x+b\cos x+c)}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}$$

$$=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x+c|$$

$$+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x+c}.$$

求积分：

2047. $\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx.$

解 此为2046题之特例，这里

$a_1=1, b_1=2, c_1=-3, a=1, b=-2, c=3;$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5},$$

$$B=\frac{ab_1-a_1b}{a^2+b^2}=\frac{2+2}{1+4}=\frac{4}{5},$$

$$C=\frac{a(ac_1-a_1c)+b(bc_1-b_1c)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{(-3-3)+(-2)(6-6)}{1+4}=-\frac{6}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin x+2\cos x-3}{\sin x-2\cos x+3}dx$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x+3}$$

$$=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}\ln|\sin x-2\cos x+3|$$

$$-\frac{6}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+5\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2}{}^{*)}+C.$$

*) 设 $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2048. $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$.

解 此为2046题之特例，这里

$a_1=1$，$b_1=0$，$c_1=0$，$a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$；

$A=\frac{1}{2}$，$B=-\frac{1}{2}$，$C=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

代入得

$$\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}+\sin x+\cos x|$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$$

2049. $\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx.$

解 本题也是2046题之特例，这里

$a_1=2$，$b_1=1$，$c_1=0$，$a=3$，$b=4$，$c=-2$；

$A=\frac{2}{5}$，$B=-\frac{1}{5}$，$C=\frac{4}{5}$.

代入得

$$\int\frac{2\sin x+\cos x}{3\sin x+4\cos x-2}dx$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x-2}$$

$$=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|3\sin x+4\cos x-2|$$

$$+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}{\sqrt{7}-\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)}\right|^{*)}+C.$$

*） 设 $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2050. 证明：

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x},$$

式中A,B,C都是常系数。

证 按题意a、b不同时为零。设

$$a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x$$
$$=A\cos x(a\sin x+b\cos x)-B\sin x(a\sin x+b\cos x)+C,$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$aA-bB=2b_1,\quad C-aB=a_1,\quad C+bA=c_1,$$

从而

$$A=\frac{bc_1-a_1b+2ab_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ac_1-aa_1-2bb_1}{a^2+b^2},$$

$$C=\frac{a_1b^2+a^2c_1-2abb_1}{a^2+b^2}.$$

代入得

$$\int\frac{a_1\sin^2x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2x}{a\sin x+b\cos x}dx$$

$$=A\int\cos x\,dx-B\int\sin x\,dx+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=A\sin x+B\cos x+C\int\frac{dx}{a\sin x+b\cos x}.$$

求积分：

2051. $\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$。

解 此为2050题之特例，这里

$$a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 3, a = 1, b = 1;$$

$$A = \frac{bc_1 - a_1 b + 2ab_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 - 4}{1 + 1} = -1,$$

$$B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 + 4}{1 + 1} = 3,$$

$$C = \frac{a_1 b^2 + a^2 c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 + 3 + 4}{1 + 1} = 4.$$

代入得

$$\int \frac{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= -\sin x + 3\cos x + 4\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

$$= -\sin x + 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$= -\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

2052. $\int \frac{\sin^2 x - \sin x\cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$。

解 本题也是2050题的特例，这里

$$a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = 2, a = 1, b = 2;$$

$$A=\frac{1}{5},\ B=\frac{3}{5},\ C=\frac{8}{5}.$$

代入得

$$\int\frac{\sin^2x-\sin x\cos x+2\cos^2x}{\sin x+2\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{5}\sin x+\frac{3}{5}\cos x+\frac{8}{5}\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{1}{5}(\sin x+3\cos x)$$

$$+\frac{8}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{5}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|^{*)}+C.$$

*) 设$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，积分即得所求式子。

2053．证明：若$(a-c)^2+b^2\neq 0$，则

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}dx$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中A,B为未定系数，λ_1,λ_2为下方程式的根

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0\quad(\lambda_1\neq\lambda_2)$$

及

$$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x,\ k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}\quad(i=1,2).$$

证 记

$$a^2\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$$
$$=(a-\lambda_i)\sin^2 x+2b\sin x\cos x+(c-\lambda_i)\cos^2 x+\lambda_i$$
$$=\frac{1}{a-\lambda_i}[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x$$
$$+(c-\lambda_i)(a-\lambda_i)\cos^2 x]+\lambda_i,$$

其中$\lambda_i(i=1,2)$为$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$的根。

由假定$(a-c)^2+b^2\neq 0$，从而$(a-c)^2+4b^2\neq 0$，因此$\lambda_1\neq\lambda_2$。

再设 $k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}$ $(i=1,2)$及

$$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x.$$

由于$(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)-b^2=0$，即$b^2=(a-\lambda_i)(c-\lambda_i)$。于是，

$$a^2\sin^2 x+2b\sin x\cos x+c\cos^2 x$$
$$=k_i[(a-\lambda_i)^2\sin^2 x+2b(a-\lambda_i)\sin x\cos x$$
$$+b^2\cos^2 x]+\lambda_i=k_i[(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_i$$
$$=k_i u_i^2+\lambda_i. \qquad (1)$$

其次，设

$$a_1\sin x+b_1\cos x=A[(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x]$$
$$+B[(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x], \qquad (2)$$

比较等式两端同类项的系数，则有

$$-b(A+B)=a_1,$$
$$A(a-\lambda_1)+B(a-\lambda_2)=b_1,$$
$$A=-\frac{a_1(\lambda_1-\lambda_2)+bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)},$$

$$B=\frac{bb_1+a_1(a-\lambda_1)}{b(\lambda_1-\lambda_2)}{}^{*)}.$$

由（1）式及（2）式即得

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a^2\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}dx$$

$$=A\int\frac{(a-\lambda_1)\cos x-b\sin x}{k_1[(a-\lambda_1)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_1}dx$$

$$+B\int\frac{(a-\lambda_2)\cos x-b\sin x}{k_2[(a-\lambda_2)\sin x+b\cos x]^2+\lambda_2}dx$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2}.$$

*) 按题意，$b\neq 0$。因若$b=0$，则$\lambda_1=a$，$\lambda_2=c$，从而 k_1 无意义。不过，当$b=0$时，仍能化为所要求的类似形式。事实上，当 $b=0$ 时，$a\neq c$，

我们有

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+2b\sin x\cos x+c\cos^2x}dx$$

$$=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx$$

$$=a_1\int\frac{\sin x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx+b_1\int\frac{\cos x}{a\sin^2x+c\cos^2x}dx$$

$$=a_1\int\frac{-d(\cos x)}{(c-a)\cos^2x+a}+b_1\int\frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2x+c}$$

$$=A\int\frac{du_1}{k_1u_1^2+\lambda_1}+B\int\frac{du_2}{k_2u_2^2+\lambda_2},$$

式中$A=-a_1, B=b_1, k_1=c-a, k_2=a-c,$

$u_1=\cos x, u_2=\sin x, \lambda_1=a, \lambda_2=c.$

本题也可用下法另证：命$u_i=(a-\lambda_i)\sin x+b\cos x,$

$k_i=\frac{1}{a-\lambda_i}(i=1,2)$，代入积分等式.然后两边求导，

整理并比较系数，便可知λ_i必为$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0$的根，

相应可求出系数，A，B。

求积分：

2054. $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx.$

解 $\int\frac{2\sin x-\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx$

$$=\int\frac{2\sin x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx-\int\frac{\cos x}{3\sin^2x+4\cos^2x}dx$$

$$=-2\int\frac{d(\cos x)}{3+\cos^2x}-\int\frac{d(\sin x)}{4-\sin^2x}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+C.$$

2055. $\int\frac{\sin x+\cos x}{2\sin^2x-4\sin x\cos x+5\cos^2x}dx.$

解 此为2053题之特例，这里

$a_1=1$，$b_1=1$，$a=2$，$b=-2$，$c=5$。

由

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

求得$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 6$，从而

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$= \frac{(1-6) - 2 + (2-1)}{-2(1-6)} = \frac{3}{5},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2+1}{10} = -\frac{1}{10};$$

$$u_1 = (a - \lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a - \lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1} = 1,$$

$$k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1}$$

$$+ \frac{1}{10}\int \frac{d(4\sin x + 2\cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{3}{5}\text{arc tg}(\sin x - 2\cos x)$$

$$+\frac{1}{10\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+2\sin x+\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x-\cos x}\right|+C.$$

2056. $\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx.$

解 本题也是2053题的特例，因为

$$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx$$

$$=\int\frac{\sin x-2\cos x}{\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x}dx,$$

这里，

$$a_1=1,b_1=2,a=1,b=2,c=1;$$

$$\lambda_1=3,\lambda_2=-1; k_1=-\frac{1}{2}, k_2=\frac{1}{2};$$

$$A=\frac{1}{4},B=-\frac{3}{4};$$

$$u_1=2(\cos x-\sin x),u_2=2(\cos x+\sin x).$$

代入得

$$\int\frac{\sin x-2\cos x}{1+4\sin x\cos x}dx=\frac{1}{4}\int\frac{2d(\cos x-\sin x)}{-2(\cos x-\sin x)^2+3}$$

$$-\frac{3}{4}\int\frac{2d(\cos x+\sin x)}{2(\cos x+\sin x)^2-1}$$

$$=-\frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1}{\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-1}\right|$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}(\sin x-\cos x)}\right|+C.$$

2057. 证明

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+C\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中A,B,C为未定系数。

证 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$,

式中$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

于是,

$$\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int \frac{dx}{\sin^n(x+\alpha)}$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\int \frac{1}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}d[\operatorname{ctg}(x+\alpha)]$$

$$=-(a^2+b^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)}{\sin^{n-2}(x+\alpha)}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int \frac{\operatorname{ctg}(x+\alpha)\cos(x+\alpha)}{\sin^{n-1}(x+\alpha)}dx$$

$$=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$-\frac{n-2}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int \frac{1-\sin^2(x+\alpha)}{\sin^n(x+\alpha)}dx.$$

设$I_n=\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}$,则由上式可得

$$I_n=\frac{\frac{b}{a^2+b^2}\sin x-\frac{a}{a^2+b^2}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+(2-n)I_n+\frac{n-2}{a^2+b^2}I_{n-2}.$$

于是，

$$I_n=\frac{\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}\sin x-\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+C\int\frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

式中$A=\frac{b}{(n-1)(a^2+b^2)}$，$B=\frac{a}{(n-1)(a^2+b^2)}$,

$$C=\frac{n-2}{(n-1)(a^2+b^2)}.$$

2058. 求$\int\frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

解 此为2057题之特例，这里

$a=1, b=2, n=3;$

$A=\frac{2}{10}$, $B=-\frac{1}{10}$, $C=\frac{1}{10}$.

代入得

$$\int \frac{dx}{(\sin x+2\cos x)^3}=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}$$

$$+\frac{1}{10}\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x}$$

$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}$$

$$+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right|+C.$$

其中$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\alpha=\operatorname{arc\,tg}2$。

2059. 若n为大于1的自然数，证明

$$\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+B\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}$$

$(|a|\neq|b|)$，

并求出系数A，B和C。

证 设$I_n=\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^n}$，先考虑$I_{n-1}$。

$$I_{n-1}=\frac{1}{a}\int \frac{(a+b\cos x)-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b}{a}\int\frac{d(\sin x)}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(n-1)b^2}{a}\int\frac{\sin^2 x}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{(b^2-a^2)+(a+b\cos x)(a-b\cos x)}{(a+b\cos x)^n}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$+\frac{n-1}{a}\int\frac{a-b\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}\int\frac{(a+b\cos x)-2a}{(a+b\cos x)^{n-1}}dx$$

$$=\frac{1}{a}I_{n-2}-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}+\frac{(n-1)(b^2-a^2)}{a}I_n$$

$$-\frac{n-1}{a}I_{n-2}+2(n-1)I_{n-1},$$

于是，

$$\frac{(n-1)(a^2-b^2)}{a}I_n=-\frac{b\sin x}{a(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+(2n-3)I_{n-1}-\frac{n-2}{2}I_{n-2}.$$

最后得到

$$I_n=-\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}I_{n-2},$$

即

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}$$

$$+B\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-1}}+C\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^{n-2}}.$$

式中 $A=-\frac{b}{(n-1)(a^2-b^2)}$, $B=\frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2-b^2)}$,

$$C=-\frac{n-2}{(n-1)(a^2-b^2)}(|a|\neq|b|;n>1\text{且}a\neq0).$$

若$a=0$，则$b\neq0$，我们有

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^n}=\frac{1}{b^n}\int\frac{dx}{\cos^n x}$$

$$=\frac{1}{b^n}\left[\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}\right]^{*)}.$$

*) 利用2012题(б)的结果。

求积分：

2060. $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

解 $\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x\sqrt{2-\cos^2 x}}$

$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x\sqrt{2\sec^2 x-1}} = \int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2\sec^2 x-1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}\sec x+\sqrt{2\sec^2 x-1}\right| + C$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|} + C.$

2061. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx.$

解 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x}}dx = \int \frac{\sin^2 x d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

$= 2\int \sin^2 x d(\sqrt{\operatorname{tg} x}) = 2\int (1-\cos^2 x)d(\sqrt{\operatorname{tg} x})$

$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - 2\int \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg} x})}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

$= 2\sqrt{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg} x+\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{2\operatorname{tg} x}+1}$

$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2\operatorname{tg} x}}{\operatorname{tg} x-1}^{*)} + C \quad (\operatorname{tg} x > 0).$

*) 利用1884题的结果。

2062. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}.$

解 由于

$2+\sin 2x = 1+(\sin x+\cos x)^2$

$$=3-(\sin x-\cos x)^2.$$

于是，

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\int\frac{\cos x-(\cos x-\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}dx$$

$$=\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}dx$$

$$-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$=-\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}+\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x}),$$

因而，

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

2063. $\int\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ $(0<\varepsilon<1)$.

解 此为2059题之特例，这里

$a=1$，$b=\varepsilon$，$n=2$，

$$A=-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2},\ B=\frac{1}{1-\varepsilon^2},\ C=0.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = -\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$= -\frac{\varepsilon\sin x}{(1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon\cos x)} + \frac{2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{*)} + C.$$

*) 利用2028题(a)的结果。

2064$^+$. $\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx$

解 设 $t=\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}$，则

$$dt=\frac{-\frac{1}{2}\cos a}{\sin^2\frac{x-a}{2}}dx, \quad \frac{dx}{\sin^2\frac{x-a}{2}}=-\frac{2}{\cos a}dt.$$

于是，

$$\int \frac{\cos^{n-1}\frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1}\frac{x-a}{2}}dx = -\frac{2}{\cos a}\int t^{n-1}dt$$

$$=-\frac{2}{n\cos a}t^n+C$$

$$=-\frac{2}{n\cos a}\left(\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right)^n+C\quad(\cos a\neq0).$$

2065. 推出积分

$$I_n=\int\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}\right)^n dx$$

的递推公式（n为自然数）。

证　方法一：

设$t=\dfrac{\sin\frac{x-a}{2}}{\sin\frac{x+a}{2}}$，则

$$x=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+t}{1-t}\cdot\operatorname{tg}\frac{a}{2}\right),$$

$$dx=\frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}dt.$$

由于

$$\frac{4t^n\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$=\frac{4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-2}+\frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$\cdot\frac{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)}{\sec^2\frac{a}{2}}t^{n-1}$$

$$+\frac{-4\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{t^2\sec^2\frac{a}{2}+2t\cdot\left(\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}-1\right)+\sec^2\frac{a}{2}}$$

$$\cdot t^{n-2}\quad(n>2),$$

两端对 t 积分，即得递推公式

$$I_n=\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}+2I_{n-1}\cos a-I_{n-2}.$$

方法二：

设 $y=\frac{x+a}{2}$，则 $\frac{x-a}{2}=y-a$，从而

$$I_n=2\int\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n dy$$

$$=2\int\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy$$

$$=2\int\frac{\sin y\cos a-\cos y\sin a}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy$$

$$=\cos a I_{n-1}-2\sin a\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^{n-1}dy.$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y}=t=\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\sin\frac{x+a}{2}}, \quad J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}t^n dy,$$

则

$$I_n=\cos aI_{n-1}-\sin aJ_{n-1}, \quad J_{n-1}=\frac{\cos aI_{n-1}-I_n}{\sin a}. \quad (1)$$

又

$$J_n=2\int\frac{\cos y}{\sin y}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n dy$$

$$=\frac{-2}{n}\int\sin^n(y-a)d\left(\frac{1}{\sin^n y}\right)$$

$$=-\frac{2}{n}\left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y}\right]^n$$

$$+2\int\frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y}\cos(y-a)dy$$

$$=-\frac{2}{n}t^n+2\int t^{n-1}\frac{\cos y\cos a+\sin y\sin a}{\sin y}dy$$

$$=-\frac{2}{n}t^n+\cos aJ_{n-1}+\sin aI_{n-1}. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式解得

$$I_n=I_{n-1}\cos a-\sin aJ_{n-1}$$

$$=I_{n-1}\cos a-\sin a\left(-\frac{2}{n-1}t^{n-1}+\cos aJ_{n-2}+I_{n-2}\sin a\right)$$

$$=I_{n-1}\cos a+\frac{2\sin a}{n-1}t^{n-1}$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{I_{n-2}\cos\alpha-I_{n-1}}{\sin\alpha}\right)-\sin^2\alpha I_{n-2}$$

$$=2I_{n-1}\cos\alpha-I_{n-2}+\frac{2\sin\alpha}{n-1}t^{n-1}.$$

§5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明若$P(x)$为n次多项式，则

$$\int P(x)e^{ax}dx=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C.$$

证 $$\int P(x)e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int P(x)d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a}\int e^{ax}P'(x)dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(e^{ax})$$

$$=\frac{1}{a}P(x)e^{ax}-\frac{1}{a^2}P'(x)e^{ax}+\frac{1}{a^2}\int e^{ax}P''(x)dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a}-\frac{P'(x)}{a^2}+\cdots+(-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right]+C,$$

因为$P(x)$为n次多项式，所以$P^{(n+1)}(x)=0$，从而上述等式括号中的导数到$P^{(n)}(x)$为止。

2067. 证明若$P(x)$为n次多项式，则

$$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C$$

及

$$\int P(x)\sin ax\,dx=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

证 $$\int P(x)\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\int P(x)d(\sin ax)$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax-\frac{1}{a}\int P'(x)\sin ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(\cos ax)$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\cos ax\,dx$$

$$=\frac{1}{a}P(x)\sin ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\cos ax-\frac{1}{a^3}P''(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\cos ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\cos ax dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{\sin ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

$$\int P(x)\sin ax dx=-\frac{1}{a}\int P(x)d(\cos ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a}\int P'(x)\cos ax dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}\int P'(x)d(\sin ax)$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax$$

$$-\frac{1}{a^2}\int P''(x)\sin ax dx$$

$$=-\frac{1}{a}P(x)\cos ax+\frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax+\frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax$$

$$-\frac{1}{a^4}P'''(x)\sin ax+\frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\sin ax dx$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=-\frac{\cos ax}{a}\left[P(x)-\frac{P''(x)}{a^2}+\frac{P^{(4)}(x)}{a^4}-\cdots\right]$$

$$+\frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x)-\frac{P'''(x)}{a^2}+\frac{P^{(5)}(x)}{a^4}-\cdots\right]+C.$$

上述导数项是有限的，其次数$\leqslant n$。

求积分：

2068. $\int x^3e^{3x}dx$.

解 $$\int x^3e^{3x}dx=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{9}+\frac{6x}{27}-\frac{6}{81}\right)^{*)}+C$$

$$=e^{3x}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{9}-\frac{2}{27}\right)+C.$$

*) 利用2066题的结果。

2069. $\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx$.

解 $$\int(x^2-2x+2)e^{-x}dx=e^{-x}\left(\frac{x^2-2x+2}{-1}\right.$$

$$\left.-\frac{2x-2}{1}+\frac{2}{-1}\right)^{*)}+C$$

$$=-e^{-x}(x^2+2)+C.$$

*) 利用2066题的结果。

2070. $\int x^5\sin 5x dx$.

解 $$\int x^5\sin 5xdx=-\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{20x^3}{25}+\frac{120x}{625}\right)$$

$$+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{60x^2}{25}+\frac{120}{625}\right)^{*)}+C$$

$$=-\frac{\cos 5x}{5}\left(x^5-\frac{4x^3}{5}+\frac{24x}{125}\right)$$

$$+\frac{\sin 5x}{25}\left(5x^4-\frac{12x^2}{5}+\frac{24}{125}\right)+C.$$

*) 利用2067题的结果。

2071. $\int(1+x^2)^2\cos x dx$.

解 $\int(1+x^2)^2\cos x dx=\int(1+2x^2+x^4)\cos x dx$

$=\sin x[(1+2x^2+x^4)-(4+12x^2)+24]$

$\quad+\cos x[(4x+4x^3)-24x]^{*)}+C$

$=(21-10x^2+x^4)\sin x-(20x-4x^3)\cos x+C.$

*) 利用2067题的结果。

2072. $\int x^7 e^{-x^2}dx$.

解 $\int x^7 e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int(x^2)^3 e^{-x^2}d(x^2)$

$=\frac{1}{2}e^{-x^2}\left(\frac{x^6}{-1}-\frac{3x^4}{1}+\frac{6x^2}{-1}-\frac{6}{1}\right)^{*)}+C$

$=-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^6+3x^4+6x^2+6)+C.$

*) 利用2066题的结果。

2073. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx$.

解 $\int x^2 e^{\sqrt{x}}dx=2\int(\sqrt{x})^5 e^{\sqrt{x}}d(\sqrt{x})$

$=2e^{\sqrt{x}}(x^{\frac{5}{2}}-5x^2+20x^{\frac{3}{2}}-60x+120x^{\frac{1}{2}}-120)^{*)}+C.$

*) 利用2066题的结果。

2074. $\int e^{ax}\cos^2 bx dx$.

解 $\int e^{ax}\cos^2 bx dx = \frac{1}{2}\int e^{ax}(1+\cos 2bx)dx$

$$=\frac{1}{2a}e^{ax}+\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos 2bx+2b\sin 2bx}{a^2+4b^2}{}^{*)}+C.$$

*) 利用1828题的结果。

2075. $\int e^{ax}\sin^3 bx dx$.

解 $\int e^{ax}\sin^3 bx dx = \int e^{ax}\sin bx\cdot\frac{1-\cos 2bx}{2}dx$

$$=\int e^{ax}\left(\frac{3}{4}\sin bx-\frac{1}{4}\sin 3bx\right)dx$$

$$=\frac{3}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$-\frac{1}{4}e^{ax}\cdot\frac{a\sin 3bx-3b\cos 3bx}{a^2+9b^2}{}^{*)}+C.$$

*) 利用1829题的结果。

2076. $\int xe^x\sin x\,dx$.

解 $\int xe^x\sin x dx = \int x\sin x d(e^x)$

$$=xe^x\sin x-\int e^x(\sin x+x\cos x)dx$$

$$=xe^x\sin x-\int(\sin x+x\cos x)d(e^x)$$

$$=e^x(x\sin x-\sin x-x\cos x)$$

$$+\int e^x(2\cos x-x\sin x)dx$$

$$=e^x(x\sin x-\sin x-x\cos x)$$

$$+2\int e^x\cos x\,dx-\int xe^x\sin x\,dx.$$

于是,

$$\int xe^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x$$

$$-x\cos x)+\int e^x\cos x\,dx$$

$$=\frac{e^x}{2}(x\sin x-\sin x-x\cos x)+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)^{*)}+C$$

$$=\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C.$$

*) 利用1828题的结果。

2077. $\int x^2e^x\cos x\,dx.$

解 $\int x^2e^x\cos x\,dx=\int x^2\cos x\,d(e^x)$

$$=x^2e^x\cos x-\int e^x(2x\cos x-x^2\sin x)dx$$

$$=x^2e^x\cos x-\int(2x\cos x-x^2\sin x)d(e^x)$$

$$=x^2e^x\cos x-e^x(2x\cos x-x^2\sin x)$$

$$+\int e^x(2\cos x-4x\sin x-x^2\cos x)dx$$

$$=e^x[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+2\int e^x\cos x dx$$

$$-4\int xe^x\sin x dx-\int x^2e^x\cos x dx,$$

于是，

$$\int x^2e^x\cos x dx=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]$$

$$+\int e^x\cos x dx-2\int xe^x\sin x dx$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\cos x]+\frac{e^x}{2}(\sin x+\cos x)^{*)}$$

$$-2\cdot\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]^{**)}+C$$

$$=\frac{e^x}{2}[x^2(\sin x+\cos x)-2x\sin x$$

$$+(\sin x-\cos x)]+C.$$

*) 利用1828题的结果.

**) 利用2076题的结果.

2078. $\int xe^x\sin^2 x dx$.

解 $\int xe^x\sin^2 x dx=\frac{1}{2}\int xe^x(1-\cos 2x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int xe^x dx-\frac{1}{2}\int xe^x\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}\int x\cos 2x d(e^x)$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x$$

$$+\frac{1}{2}\int e^x(\cos 2x-2x\sin 2x)dx$$

$$=\frac{1}{2}e^x(x-1)-\frac{1}{2}xe^x\cos 2x+\frac{e^x}{2}\cdot\frac{\cos 2x+2\sin 2x}{5}{}^{*)}$$

$$-\int xe^x\sin 2x dx,$$

而

$$\int xe^x\sin 2x dx=\int x\sin 2x d(e^x)$$

$$=xe^x\sin 2x-\int e^x(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$$

$$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)^{**)}$$

$$-2\int xe^x(1-2\sin^2 x)dx$$

$$=xe^x\sin 2x-\frac{e^x}{5}(\sin 2x-2\cos 2x)$$

$$-2(x-1)e^x+4\int xe^x\sin^2 x dx.$$

代入得

$$\int xe^x\sin^2 x dx=e^x\left[\frac{x-1}{2}-\frac{x}{10}(2\sin 2x+\cos 2x)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{50}(4\sin 2x-3\cos 2x)\right]+C.$$

*） 利用1828题的结果。

**） 利用1829题的结果。

2079. $\int (x-\sin x)^3 dx$.

解 $\int (x-\sin x)^3 dx$

$$= \int (x^3-3x^2\sin x+3x\sin^2 x-\sin^3 x)dx$$

$$=\frac{x^4}{4}+3\int x^2 d(\cos x)+\frac{3}{2}\int x(1-\cos 2x)dx$$

$$+\int (1-\cos^2 x)d(\cos x)$$

$$=\frac{x^4}{4}+3x^2\cos x-6\int x\cos x dx+\frac{3}{4}x^2$$

$$-\frac{3}{4}\int x d(\sin 2x)+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-6\int x d(\sin x)-\frac{3}{4}x\sin 2x$$

$$+\frac{3}{4}\int \sin 2x dx+\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-6x\sin x-6\cos x$$

$$-\frac{3}{4}x\sin 2x+\cos x-\frac{3}{8}\cos 2x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{4}+3x^2\cos x-x\left(6\sin x+\frac{3}{4}\sin 2x\right)$$

$$-\left(5\cos x+\frac{3}{8}\cos 2x\right)-\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$$

2080. $\int \cos^2\sqrt{x}\,dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$. 于是，

$$\int \cos^2\sqrt{x}\,dx = 2\int t\cos^2 t\,dt=\int t(1+\cos 2t)dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}\int t d(\sin 2t)$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t-\frac{1}{2}\int \sin 2t dt$$

$$=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}t\sin 2t+\frac{1}{4}\cos 2t+C$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x}\sin(2\sqrt{x})+\frac{1}{4}\cos(2\sqrt{x})+C.$$

2081. 证明若R为有理函数及a_1，a_2，…，a_n为可公度的数，则积分

$$\int R(e^{a_1x},\ e^{a_2x},\ \cdots,\ e^{a_nx})dx$$

是初等函数。

证 按题意a_1，a_2，…，a_n为可公度的数，于是存在一个实数 α，使得

$$a_1=k_1\alpha,\ a_2=k_2\alpha,\ \cdots,\ a_n=k_n\alpha\ (\alpha\neq 0),$$

其中 k_1，k_2，…，k_n 为整数。

设$e^{\alpha x}=t$，则$x=\frac{1}{\alpha}\ln t$，$dx=\frac{1}{\alpha t}dt$.

于是，

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x})dx$$

$$=\frac{1}{a}\int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \cdots, t^{k_n})\frac{dt}{t}=\int R^*(t)dt,$$

其中$R^*(t)$是t的有理函数。因此，积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \cdots, e^{a_n x})dx$$

为初等函数。

求下列积分：

2082. $\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}$。

解 $$\int\frac{dx}{(1+e^x)^2}=\int\frac{(1+e^x)-e^x}{(1+e^x)^2}dx$$

$$=\int\frac{dx}{1+e^x}-\int\frac{e^x dx}{(1+e^x)^2}$$

$$=\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$=x-\ln(1+e^x)+\frac{1}{1+e^x}+C.$$

2083. $\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}$。

解 $$\int\frac{e^{2x}dx}{1+e^x}=\int\frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx$$

$$=\int(e^x-1)dx+\int\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=e^x-x+\int\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx=e^x-\ln(1+e^x)+C.$$

2084. $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}$.

解 $\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}=\int\frac{dx}{(e^x+2)(e^x-1)}$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x-1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{e^x+2}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x-1}\right)dx-\frac{1}{6}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|-\frac{x}{6}+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C$$

$$=-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)+C.$$

2085. $\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$.

解 设 $e^{\frac{x}{6}}=t$，则 $x=6\ln t$，$dx=\frac{6}{t}dt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}=6\int\frac{dt}{t(1+t^3+t^2+t)}$$

$$=6\int\frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)}$$

$$=6\int\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{2(t+1)}-\frac{t+1}{2(t^2+1)}\right]dt$$

$$=6\ln t-3\ln(t+1)-\frac{3}{2}\ln(1+t^2)-3\operatorname{arc\,tg}t+C$$

$$=x-3\ln\left[\left(1+e^{\frac{x}{6}}\right)\sqrt{1+e^{\frac{x}{3}}}\right]-3\operatorname{arc\,tg}(e^{\frac{x}{6}})+C.$$

2086. $\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx.$

解 设 $e^{\frac{x}{4}}=t$，则 $x=4\ln t$，$dx=\frac{4}{t}dt$.

代入得

$$\int\frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}dx=4\int\frac{1+t^2}{t(1+t)^2}dt$$

$$=4\int\left[\frac{1}{t}-\frac{2}{(1+t)^2}\right]dt$$

$$=4\ln t+\frac{8}{1+t}+C=x+\frac{8}{1+e^{\frac{x}{4}}}+C.$$

2087. $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\int\frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$

$$=-2\int\frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1-(e^{-\frac{x}{2}})^2}}$$

$$=-2\arcsin\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)+C.$$

2088. $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx.$

解 $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx$

$$=\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

$$=\int\frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2-1}}+\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}$$

$$=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}-1}\right)+\arcsin(e^{-x})+C.$$

2089. $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx.$

解 $\int\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\,dx=\int\frac{e^{2x}+4e^x-1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$

$$=\int\frac{2e^{2x}+4e^x}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}dx$$

$$+2\int\frac{e^xdx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}-\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}$$

$$=\int\frac{d(e^{2x}+4e^x-1)}{2\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}}+2\int\frac{d(e^x+2)}{\sqrt{(e^x+2)^2-5}}$$

$$+\int\frac{d(e^{-x}-2)}{\sqrt{5-(e^{-x}-2)^2}}$$

$$=\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}+2\ln\left(e^x+2+\sqrt{e^{2x}+4e^x-1}\right)$$

$$-\arcsin\frac{2e^x-1}{\sqrt{5}e^x}+C.$$

2090. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$$

$$=\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})d(e^{-x})$$

$$=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}+\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})+\frac{1}{4}I_1+\frac{1}{4}I_2.$$

对于$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$，设$\sqrt{1+e^x}=t$，则

$$x=\ln(t^2-1),\quad dx=\frac{2tdt}{t^2-1}.$$

于是，

$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=2\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\ln\frac{t-1}{t+1}+C=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1-e^x}+1}+C_1.$$

对于$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}$，设$\sqrt{1-e^x}=t$，则

$$x=\ln(1-t^2),\quad dx=-\frac{2tdt}{1-t^2}.$$

于是，

$$I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{1-e^x}}=-2\int\frac{dt}{1-t^2}=-\ln\frac{1+t}{1-t}+C_2$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-e^x}}{1-\sqrt{1-e^x}}+C_2.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=-\frac{e^{-x}}{2}(\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1-e^x})$$

$$+\frac{1}{4}\ln\frac{(\sqrt{1+e^x}-1)(1-\sqrt{1-e^x})}{(\sqrt{1+e^x}+1)(1+\sqrt{1-e^x})}+C.$$

2091. 证明积分

$$\int R(x)e^{ax}dx,$$

（式中R为有理函数，其分母仅有实根）可用初等函数和超越函数

$$\int\frac{e^{ax}}{x}dx=li(e^{ax})+C,\text{ 式中 } lix=\int\frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为R的分母仅有实根，所以仅包含形如$(x-a_i)^{k_i}$的因子（$i=1, 2, \cdots l$）. 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x)=P(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j},$$

其中$P(x)$为x的多项式，A_{ij}是常系数。

从而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx.$$

上式右端第一个积分显然是初等函数．而积分

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx$$

可用初等函数和超越函数来表示。事实上，设$x-a_i=t$，则

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=\int\frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j}dt$$

$$=\frac{e^{aa_i}}{1-j}\int e^{at}d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right)$$

$$=\frac{e^{aa_i}}{1-j}e^{t}\cdot\frac{1}{t^{j-1}}-\frac{ae^{aa_i}}{1-j}\int\frac{e^{at}}{t^{j-1}}dt.$$

这样，被积函数中分母的次数便降低一次。再继续运用分部积分法（j—2）次，即可得

$$\int\frac{e^{ax}}{(x-a_i)^j}dx=g_{ij}(x)+B_{ij}li(e^{a(x-a_i)}),$$

其中$g_{ij}(x)$为x的初等函数，B_{ij}为常数。

因而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx=\int P(x)e^{ax}dx$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}g_{ij}(x)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}A_{ij}B_{ij}\mathrm{li}(e^{a(x-a_i)})$$

是初等函数与超越函数之和。

2092. 在甚么情形下，积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx$$

（式中$P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$及$a_0$，$a_1$，…，$a_n$为常数）为初等函数？

解 $$\int\frac{a_k}{x^k}e^{x}dx=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{k-1}\int\frac{e^x}{x^{k-1}}dx$$

$$=\cdots\cdots=-\frac{a_k}{k-1}\cdot\frac{e^x}{x^{k-1}}-\frac{a_k}{(k-1)(k-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-2}}-\cdots$$

$$-\frac{a_k}{(k-1)!}\cdot\frac{e^x}{x}+\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx,$$

于是，

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^{x}dx=\int\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{x^k}\right)e^{x}dx=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{a_k}{x^k}dx$$

$$=-\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{a_k}{(k-1)(k-2)\cdots(k-j)}\cdot\frac{e^x}{x^{k-j}}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx+a_0e^x.$$

因而，若

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=0,$$

即

$$a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0,$$

则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数。

求积分：

2093. $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$

解 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x dx=\int\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)e^x dx$

$$=e^x-4li(e^x)-4\int e^x d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=e^x-4li(e^x)-\frac{4}{x}e^x+4\int\frac{e^x}{x}dx$$

$$=e^x\left(1-\frac{4}{x}\right)+C.$$

2094. $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx=-e^{-x}-li(e^{-x})+C.$

2095. $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx$

解 $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)}dx$

$= \int \frac{e^{2x}}{x-2}dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1}dx$

$= e^4 \int \frac{e^{2(x-2)}d(x-2)}{x-2} - e^2 \int \frac{e^{2(x-1)}d(x-1)}{x-1}$

$= e^4 li(e^{2x-4}) - e^2 li(e^{2x-2}) + C.$

2096. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx.$

解 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = -\int xe^x d\left(\frac{1}{x+1}\right)$

$= -xe^x \frac{1}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C$

$= \frac{e^x}{x+1} + C.$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}dx.$

解 $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2}dx = \int (x^2+4x+12)e^{2x}dx$

$+32\int \frac{e^{2x}dx}{x-2} + 16\int \frac{e^{2x}dx}{(x-2)^2}$

$= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4}\right)^{*)} + 32e^4 li(e^{2x-4})$

$-16\int e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right)$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}\right)+32e^4 li(e^{2x-4})$$

$$-\frac{16e^{2x}}{x-2}+32\int\frac{e^{2x}dx}{x-2}$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2+3x+\frac{21}{2}-\frac{32}{x-2}\right)+64e^4 li(e^{2x-4})+C.$$

*) 利用2066题的结果。

求含有 $\ln f(x)$，$\operatorname{arctg} f(x)$，$\arcsin f(x)$，$\arccos f(x)$ 等函数的积分，其中$f(x)$为代数函数：

2098. $\int \ln^n x dx$ （n 为自然数）。

解 $\int \ln^n x dx = x\ln^n x - n\int \ln^{n-1} x dx$

$$=x\ln^n x - nx\ln^{n-1}x + n(n-1)\int \ln^{n-2} x dx = \cdots\cdots$$

$$=x[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + n(n-1)\ln^{n-2} x - \cdots$$

$$+(-1)^{n-1} n!\ \ln x + (-1)^n n!]+C.$$

2099. $\int x^3 \ln^3 x dx$.

解 $\int x^3\ln^3 x dx = \frac{1}{4}\int \ln^3 x d(x^4)$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{4}\int x^3 \ln^2 x dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}\int \ln^2 x d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3 x - \frac{3}{16}x^4\ln^2 x + \frac{3}{8}\int x^3 \ln x dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3x-\frac{3}{16}x^4\ln^2x+\frac{3}{32}\int\ln x d(x^4)$$

$$=\frac{1}{4}x^4\ln^3x-\frac{3}{16}x^4\ln^2x+\frac{3}{32}x^4\ln x-\frac{3}{32}\int x^3dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4\left(\ln^3x-\frac{3}{4}\ln^2x+\frac{3}{8}\ln x-\frac{3}{32}\right)+C.$$

2100. $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3dx.$

解 $\int\left(\frac{\ln x}{x}\right)^3dx=-\frac{1}{2}\int\ln^3x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3x+\frac{3}{2}\int\frac{\ln^2x}{x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3x-\frac{3}{4}\int\ln^2x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3x-\frac{3}{4x^2}\ln^2x+\frac{3}{2}\int\frac{\ln x}{x^3}dx$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3x-\frac{3}{4x^2}\ln^2x-\frac{3}{4}\int\ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\ln^3x-\frac{3}{4x^2}\ln^2x-\frac{3}{4x^2}\ln x+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3x+\frac{3}{2}\ln^2x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C.$$

2101. $\int\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]\cdot\frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$

解 $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

$= \int \frac{\ln(x+a)}{x+b}dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a}dx$

$= \int \ln(x+a)d[\ln(x+b)]$

$+ \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$= \ln(x+a)\ln(x+b) - \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$+ \int \ln(x+b)d[\ln(x+a)]$

$= \ln(x+a)\ln(x+b) + C.$

2102. $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

解 $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$-2\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$-2\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, d(\sqrt{1+x^2})$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2\int dx$

$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})$

$-2\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$

2103. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$.

解 $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})dx$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=x\ln(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}) + \frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x+C.$$

2104. $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

解 $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

2105. $\int x \operatorname{arc\,tg}(x+1)dx$.

解 $\int x\operatorname{arc\,tg}(x+1)dx=\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,tg}(x+1)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}(x+1) - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg}(x+1) - \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C.$$

2106. $\int \sqrt{x}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx$.

解 $\int\sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\int\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}\,d\left(x^{\frac{3}{2}}\right)$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{1}{3}\int\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\ln(1+x)+C.$$

2107. $\int x\,\mathrm{arc\,sin}(1-x)dx.$

解 $\int x\,\mathrm{arc\,sin}(1-x)dx=\frac{1}{2}\int\mathrm{arc\,sin}(1-x)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arc\,sin}(1-x)+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx$，设 $1-x=t$，则

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}}dx=-\int\frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=\int\frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}}dt-2\int\frac{d}{\sqrt{1-t^2}}+2\int\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\sqrt{1-t^2}\,dt-2\mathrm{arc\,sin}\,t-2\sqrt{1-t^2}$$

$$=\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\mathrm{arc\,sin}\,t-2\mathrm{arc\,sin}\,t$$

$$-2\sqrt{1-t^2}+C_1$$

$$=\frac{-3-x}{2}\sqrt{2x-x^2}-\frac{3}{2}\arcsin(1-x)+C_1.$$

于是，

$$\int x\arcsin(1-x)dx=\frac{2x^2-3}{4}\arcsin(1-x)$$

$$-\frac{3+x}{4}\sqrt{2x-x^2}+C.$$

2108. $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx.$

解 $\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=x\arcsin\sqrt{x}$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$$

对于积分 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$，设 $\sqrt{x}=t$，则 $dx=2tdt$.

于是，

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx=2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

$$=-2\int\sqrt{1-t^2}\,dt+2\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=-t\sqrt{1-t^2}-\arcsin t+2\arcsin t+C_1$$

$$=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C_1.$$

因而，

$$\int\arcsin\sqrt{x}\,dx=\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C.$$

2109. $\int x \arccos\frac{1}{x}dx$.

解 $\int x\arccos\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\int\arccos\frac{1}{x}d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}x)\sqrt{x^2-1}+C.$$

2110. $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx$.

解 $\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}dx=\int\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}d(x+1)$

$$=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-\operatorname{sgn}(1-x)\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$=(x+1)\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}-2\sqrt{x}\operatorname{sgn}(1-x)+C,$$

其中用到了

$$\left(\arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)'=\frac{\frac{1}{(1+x)^2}\left[(1+x)\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right]}{\sqrt{1-\frac{4x}{(1+x)^2}}}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2}\cdot\sqrt{x}}$$

$$=\frac{1}{1+x}\cdot sgn(1-x)\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

2111. $\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{xdx}{1-x^2}$$

$$=\frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\sqrt{1-x^2}+C.$$

2112. $\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int\arccos x\,d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dx}{1-x^2}$$

$$=\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

2113. $\int x\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)dx.$

解 $$\int x\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\operatorname{arctg}x\ln(1+x^2)d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2\left[\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}+\frac{2x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$-\int x\operatorname{arc\,tg} x dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\int\frac{2x^2dx}{1+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$+\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)$$

$$+x-\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\ln(1+x^2)$$

$$-\frac{1}{2}x^2\operatorname{arc\,tg} x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C$$

$$=x-\operatorname{arc\,tg} x+\left(\frac{1+x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2}\right)\left[\ln(1+x^2)-1\right]+C.$$

2114. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx.$

解 $$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\left(1-\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{x^2-1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C.$$

2115. $\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解 $$\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\sqrt{1+x^2}+C.$$

求含有双曲线函数的积分：

2116. $\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x dx$.

解 $\int \mathrm{sh}^2 x\ \mathrm{ch}^2 x dx = \frac{1}{4}\int \mathrm{sh}^2 2x dx$

$= \frac{1}{8}\int \mathrm{sh}^2 2x d(2x)$

$= -\frac{x}{8} + \frac{\mathrm{sh}\,4x}{32}^{*)} + C$.

*) 利用1761题的结果.

2117. $\int \mathrm{ch}^4 x dx$.

解 $\int \mathrm{ch}^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\mathrm{ch}2x}{2}\right)^2 dx$

$= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mathrm{ch}2x + \frac{1}{4}\mathrm{ch}^2 2x\right) dx$

$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}4x\right)^{*)} + C$

$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\mathrm{sh}2x + \frac{1}{32}\mathrm{sh}4x + C$.

*) 利用1762题的结果.

2118. $\int \mathrm{sh}^3 x dx$.

解 $\int \mathrm{sh}^3 x dx = \int \mathrm{sh}^2 x\ \mathrm{sh} x dx = \int (\mathrm{ch}^2 x - 1) d(\mathrm{ch}\, x)$

$= \frac{1}{3}\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{ch}\, x + C$.

2119. $\int \operatorname{sh}x \operatorname{sh}2x \operatorname{sh}3x dx$.

解 $\int \operatorname{sh}x \operatorname{sh}2x \operatorname{sh}3x dx$

$$= \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch}4x - \operatorname{ch}2x)\operatorname{sh}2x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}4x \operatorname{sh}2x dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{ch}2x \operatorname{sh}2x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(\operatorname{sh}6x - \operatorname{sh}2x)dx - \frac{1}{4}\int \operatorname{sh}4x dx$$

$$= \frac{1}{24}\operatorname{ch}6x - \frac{1}{16}\operatorname{ch}4x - \frac{1}{8}\operatorname{ch}2x + C.$$

2120. $\int \operatorname{th}x dx$.

解 $\int \operatorname{th}x dx = \int \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}dx = \ln(\operatorname{ch}x) + C$.

2121. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$

解 $\int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}dx = \int \frac{1+\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}dx$

$= x - \operatorname{cth}x + C$.

2122. $\int \sqrt{\operatorname{th}x}\, dx$

解 $\int \sqrt{\operatorname{th}x}\, dx = \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}}dx$

$$= \int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}-1}} - \int \frac{e^{-2x}dx}{\sqrt{1-e^{-4x}}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2-1}}+\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1-(e^{-2x})^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}-1})+\frac{1}{2}\arcsin(e^{-2x})+C.$$

2123. $\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}$.

解 设$\operatorname{th}\frac{x}{2}=t$，则

$$\operatorname{sh}x=\frac{2t}{1-t^2},\quad \operatorname{ch}x=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x=\ln\frac{1+t}{1-t},\quad dx=\frac{2}{1-t^2}dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C.$$

2124. $\int\operatorname{sh}ax\sin bx\,dx$.

解 $\int\operatorname{sh}ax\sin bx\,dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\sin bx\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}\ ^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\ \mathrm{ch}\ ax\cdot\sin bx-b\ \mathrm{sh}\ ax\cdot\cos bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用1829题的结果。

2125. $\int \mathrm{sh}\ ax\cos bx dx$.

解 $\int \mathrm{sh}\ ax\cos bx dx=\frac{1}{2}\int e^{ax}\cos bx dx$

$$-\frac{1}{2}\int e^{-ax}\cos bx dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{ax}\cdot\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}$$

$$+\frac{1}{2}e^{-ax}\cdot\frac{a\cos bx-b\sin bx}{a^2+b^2}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{a\ \mathrm{ch}\ ax\cdot\cos bx+b\ \mathrm{sh}\ ax\cdot\sin bx}{a^2+b^2}+C.$$

*) 利用1828题的结果。

§6. 函数的积分法的各种例子

求积分：

2126. $\int\frac{dx}{x^6(1+x^2)}$.

解 $\int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} = \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^6(1+x^2)}dx$

$= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)}$

$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1)-x^2}{x^4(1+x^2)}dx$

$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)}dx$

$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} x + C.$

2127. $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$.

解 $\int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3} = \int \frac{(x^2-1)+1}{(1-x^2)^3}dx$

$= -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$

$= -\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \Big[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2}$

$- \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}\Big]^{*)}$

$= -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{4(1-x^2)^2}$

$= -\frac{1}{4}\left\{-\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-1}\right\} + \frac{x}{4(1-x^2)^2}$

$$=\frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

*） 利用1921题的递推公式。

2128. $\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

解 因为

$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)$,

$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)(x^2-x\sqrt{3}+1)$,

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}-\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\right),$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}\right),$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}dx$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\left[\ln(x^2+x\sqrt{3}+1)\right.$$

$$\left.-\ln(x^2-x\sqrt{3}+1)\right]+C_1$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+C.$$

2129. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解 设$\sqrt[6]{x}=t$，则

$\sqrt{x}=t^3$，$\sqrt[3]{x}=t^2$，$dx=6t^5dt$.

代入得

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$$

$$+C\quad(x>0).$$

2130. $\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$.

解 设$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=t$，则

$$x=\frac{1}{1+t^2}\qquad dx=-\frac{2t}{(1+t^2)^2}dt.$$

代入得

$$\int x^2\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx=-2\int\frac{dt}{(t^2+1)^4}$$

$$=-2\left[\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}\right.$$

$$\left.+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arc\,tg} t\right]^{*)}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$-\frac{5}{8}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+C_1$$

$$=-\frac{1}{24}(8x^2+10x+15)\sqrt{x(1-x)}$$

$$+\frac{5}{8}\operatorname{arc\,sin}\sqrt{x}+C\quad(0<x<1).$$

*) 利用1921题的递推公式。

2131. $\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx.$

解 设 $x=\sin t$，并限制 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则 $dx=\cos t\,dt$。

代入得

$$\int\frac{x+2}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{\sin t+2}{\sin^2 t}dt$$

$$=\int\frac{dt}{\sin t}+2\int\frac{dt}{\sin^2 t}$$

$$=\ln|\csc t-\operatorname{ctg} t|-2\operatorname{ctg} t+C$$

$$=-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{x}+C\ (0<|x|<1).$$

2132. $\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx$.

解 设$\sqrt{1-x\sqrt{x}}=t$，则

$$x=(1-t^2)^{\frac{2}{3}},\quad dx=-\frac{4}{3}t(1-t^2)^{-\frac{1}{3}}dt.$$

代入得

$$\int\sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\,dx=-\frac{4}{3}\int dt=-\frac{4}{3}t+C$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C\ \ (0<x<1).$$

2133. $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

解 设$\sqrt{1+x^2}=t$，则$x^2=t^2-1$，$xdx=tdt$. 代入得

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int(t^2-1)^2dt=\int(t^4-2t^2+1)dt$$

$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t+C$$

$$=\frac{1}{15}(8-4x^2+3x^4)\sqrt{1+x^2}+C.$$

2134. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$。

解 设$\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}=t$，则$x=\frac{1}{t^3+1}$，$dx=-\frac{3t^2}{(t^3+1)^2}dt$。

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}=-3\int \frac{t}{t^3+1}dt$$

$$=\int \frac{dt}{t+1}-\int \frac{t+1}{t^2-t+1}dt$$

$$=\ln|t+1|-\frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2-2t+1}dt-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-t+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

其中 $t=\sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$。

2135. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$。

解 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}=\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}$

$$=-\frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|x^{-3}+\frac{1}{2}+\sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}\right|+C_1$$

$$=-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3}\right|+C.$$

注　以上实际已设$x>0$。对于$x<0$，利用1856题的方法可得同一结果。

2136. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

解　$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4-2x^2-1}}=\int\frac{dx}{x^3\sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C_1$$

$$=\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right)+C.$$

2137. $\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$.

解　$$\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int\frac{(1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}dx$$

$$=\int\frac{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$$

$$=-\frac{2}{x}-x-2\int\sqrt{1-x^2}\,d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x}-x-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=-\frac{2+x^2}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{1-x^2}-2\arcsin x+C.$$

2138. $\int\frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}$.

解 $\int\frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x+x^2}}=\int\frac{(1+x)(x-\sqrt{x+x^2})}{(x+\sqrt{x+x^2})(x-\sqrt{x+x^2})}dx$

$$=\int\frac{x+x^2-\sqrt{x+x^2}-x\sqrt{x+x^2}}{-x}dx$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}dx+\int\sqrt{x+x^2}\,dx$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+2\int\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}\,d(\sqrt{x})$$

$$+\int\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}+\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$$

$$+\frac{2x+1}{4}\sqrt{x+x^2}-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{1}{2}\ln(2x+1+2\sqrt{x+x^2})$$

$$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C_1$$

$$=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{5+2x}{4}\sqrt{x+x^2}$$

$$+\frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+x^2}\right)+C,$$

其中设 $x>0$，对于 $x<-1$，同样可获得上述结果，但要注意加对数中的绝对值。

2139. $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx$。

解 $\int\frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2}dx=-\int\ln(1+x+x^2)d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)}dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\int\left(\frac{x+2}{1+x+x^2}-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{1+x+x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{1+x+x^2}\right)dx-\ln|1+x|$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}+\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

$$+\sqrt{3}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\ln|1+x|+C$$

$$=-\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x}-\frac{1}{2}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}$$

$$+\sqrt{3}\,\text{arc tg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

2140. $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx.$

解 $\int(2x+3)\arccos(2x-3)dx$

$$=\int\arccos(2x-3)d(x^2+3x)$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)+\int\frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)-\int\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$$

$$-3\int\frac{-2x+3}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}\,d\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$-6\sqrt{-x^2+3x-2}+7\int\frac{d\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$=(x^2+3x)\arccos(2x-3)$$

$$-\frac{2x-3}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-\frac{1}{8}\arcsin(2x-3)-6\sqrt{-x^2+3x-2}$$

$$-7\arccos(2x-3)+C_1$$

$$=\left(x^2+3x-\frac{55}{8}\right)\arccos(2x-3)$$

$$-\frac{2x+21}{4}\sqrt{-x^2+3x-2}+C \quad (1<x<2).$$

2141. $\int x\ln(4+x^4)dx$.

解 $\int x\ln(4+x^4)dx=\frac{1}{2}\int\ln(4+x^4)d(x^2)$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\frac{x^5}{4+x^4}dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-2\int\left(x-\frac{4x}{4+x^4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(4+x^4)-x^2+2\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

2142. $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解 $\int\frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=\int \frac{\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=(\operatorname{sgn}x)\int\frac{\arcsin x dx}{x^3\sqrt{x^{-2}-1}}+\int \arcsin x d(\arcsin x)$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\int \arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1})$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-(\operatorname{sgn}x)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\arcsin x-\int\frac{dx}{|x|}\right)$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|$$

$$+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+C\quad(0<|x|<1).$$

2143. $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

解 $\int\frac{x\ln(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=\int\ln(1+\sqrt{1+x^2})\,d(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=(1+\sqrt{1+x^2})\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

2144. $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx.$

解 $\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}\,dx$

$$=\frac{1}{3}\int\ln\sqrt{x^2-1}\,d\left[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}$$

$$-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{x}{x^2-1}dx,$$

对于右端的积分，设$\sqrt{x^2+1}=t$，则$x^2+1=t^2$，$xdx=tdt$。于是，

$$-\frac{1}{3}\int(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\frac{xdx}{x^2-1}=-\frac{1}{3}\int\frac{t^4dt}{t^2-2}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\left(t^2+2+\frac{4}{t^2-2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{9}t^3-\frac{2}{3}t-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C.$$

最后得到

$$\int x\sqrt{x^2+1}\ln\sqrt{x^2-1}dx$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2+7}{9}\sqrt{1+x^2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}}+C\quad(|x|>1).$$

2145⁺. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

解 $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$

$$= -\int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= -\sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx.$$

右端的积分

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx = \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -2\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$= -2\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1$$

$$= -2\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1.$$

于是,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right)\sqrt{1-x^2}-\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+\frac{1}{2}\arcsin x+C\quad(0<x<1).$$

2146. $\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

解 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，不妨限制 $-\pi<x<\pi$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(1+t+t^2)-\frac{1}{2}(2t+1)+\frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}-\frac{1}{4}\int\frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4(1+t+t^2)}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]^{*)}+C_1$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{**)}+C.$$

*) 利用1921题的递推公式。

**) $\frac{1}{4(1+t+t^2)}+\frac{2t+1}{12(1+t+t^2)}=\frac{t+2}{6(1+t+t^2)}$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\dfrac{\sin\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{1+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin x+1+\cos x}{\frac{1}{2}\sin x+1}=\frac{1}{6}+\frac{\cos x}{3(2+\sin x)}.$$

2147⁺. $\int\frac{\sin 4x}{\sin^8 x+\cos^8 x}dx.$

解 $\sin^8 x+\cos^8 x=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$$=[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x$$

$$=\frac{1}{8}(\sin^4 2x-8\sin^2 2x+8)$$

$$=\frac{1}{8}(\sin^2 2x-4-2\sqrt{2})(\sin^2 2x-4+2\sqrt{2})$$

$$=\frac{1}{32}(\cos4x+7+4\sqrt{2})(\cos4x+7-4\sqrt{2}).$$

于是，

$$\int\frac{\sin4x}{\sin^8x+\cos^8x}dx$$

$$=32\cdot\frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\int\frac{\sin4x}{\cos4x+7-4\sqrt{2}}dx\right.$$

$$\left.-\int\frac{\sin4x}{\cos4x+7+4\sqrt{2}}dx\right]$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos4x+7-4\sqrt{2})}{\cos4x+7-4\sqrt{2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\cos4x+7+4\sqrt{2})}{\cos4x+7+4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\cos4x+7+4\sqrt{2}}{\cos4x+7-4\sqrt{2}}+C.$$

2148. $\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}$.

解 设$1+\cos x=t^2$，并限制$t>0$，则

$$\sin x=t\sqrt{2-t^2},\quad dx=-\frac{2}{\sqrt{2-t^2}}dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}=-\int\frac{2dt}{t^2(2-t^2)}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{2-t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}+C.$$

2149. $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

解 $\int\frac{ax^2+b}{x^2+1}\operatorname{arc\,tg} x\,dx=\int\left(a-\frac{a-b}{x^2+1}\right)\operatorname{arctg} x\,dx$

$$=ax\operatorname{arc\,tg}x-a\int\frac{x\,dx}{1+x^2}-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=a\left[x\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]-\frac{a-b}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$$

2750. $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx.$

解 $\int\frac{ax^2+b}{x^2-1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$

$$=\int\left(a+\frac{a+b}{x^2-1}\right)\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|dx$$

$$=ax\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-a\int\frac{2x\,dx}{x^2-1}$$

$$+\frac{a+b}{2}\int\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|d\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$$

$$=a\left(x\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\ln\left|x^2-1\right|\right)+\frac{a+b}{4}\ln^2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

2151. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

解 $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C$

$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C$.

2152. $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

解 $\int \frac{x \operatorname{arc\,tg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \operatorname{arc\,tg} x \, d(\sqrt{1+x^2})$

$= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

$= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arc\,tg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C$.

2153⁺. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$.

解 $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} = -\int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}}$

$= -\ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C_1$

$= -\ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C$.

2154. $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解 $\int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int x^2 \arccos x \, d(\sqrt{1-x^2})$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x$

$+ \int \sqrt{1-x^2}\left(2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x$

$-\frac{2}{3}\int \arccos x \, d\left[\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \int x^2 dx$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x$

$-\frac{2}{3}\int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3}x^3$

$= -x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x - \frac{2}{3}x$

$+\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + C$

$= -\frac{6x+x^3}{9} - \frac{2+x^2}{3}\sqrt{1-x^2} \arccos x + C$.

2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx$.

解 $\int \frac{x^4 \operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) \operatorname{arc\,tg} x \, dx$

$$=\frac{1}{3}\int \operatorname{arc\,tg} x\, d\,(x^3)-\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$$

$$+\int \operatorname{arc\,tg} x\, d\,(\operatorname{arc\,tg} x)$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int \frac{x^3dx}{1+x^2}-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\int \frac{xdx}{1+x^2}+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{3}\int\left(x-\frac{x}{1+x^2}\right)dx-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

$$=\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)-x \operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C$$

$$=-\frac{1}{6}x^2-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arc\,tg} x$$

$$+\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+\frac{2}{3}\ln(1+x^2)+C.$$

2156. $\int \frac{x \operatorname{arc\,ctg} x}{(1+x^2)^2}dx.$

解 $$\int \frac{x \operatorname{arc\,ctg} x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int \operatorname{arc\,ctg} x\, d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=-\frac{\operatorname{arc\,ctg} x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$=-\frac{\text{arc ctg}x}{2(1+x^2)}-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\text{arc ctg}x\right]^{*)}+C$$

$$=-\frac{1-x^2}{4(1+x^2)}\text{arc ctg}x-\frac{x}{4(1+x^2)}+C.$$

*) 利用1921题的递推公式。

2157⁺. $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$.

解 $\int\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})d\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(1-x^2)}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.$$

对于右端积分设$x=\text{tg}\,t$，并限制$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$，则

$$\sqrt{1+x^2}=\sec t,\quad dx=\sec^2 t\,dt.$$

于是，

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec t\,dt}{1-\text{tg}^2 t}$$

$$=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t-\sin^2 t}=\int\frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\sin t}{1-\sqrt{2}\sin t}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C,$$

因而，

$$\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)}$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}\right|+C.$$

2158. $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$.

解 $\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x$

$$-\int x\left(1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}$$

$$-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(\arcsin x)^2$$

$$-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx,$$

于是，

$$\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x dx$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2$$

$$+C \quad (|x|<1).$$

2159. $\int x(1+x^2)\text{arc ctg}\, x dx$.

解 $\int x(1+x^2)\text{arc ctg}\, x dx$

$=\frac{1}{4}\int \text{arc ctg}\, x d[(1+x^2)^2]$

$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\text{arc ctg}\, x+\frac{1}{4}\int(1+x^2)dx$

$=\frac{1}{4}(1+x^2)^2\text{arc ctg}\, x+\frac{x}{4}+\frac{x^3}{12}+C$.

2160. $\int x^x(1+\ln x)dx$.

解 $\int x^x(1+\ln x)dx=\int e^{x\ln x}(1+\ln x)dx$

$=\int e^{x\ln x}d(x\ln x)$

$=e^{x\ln x}+C=x^x+C\quad(x>0)$.

2161. $\int \frac{\text{arc sin}e^x}{e^x}dx$.

解 $\int \frac{\text{arc sin}e^x}{e^x}dx=-\int \text{arc sin}e^x d(e^{-x})$

$=-e^{-x}\text{arc sin}e^x+\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$=-e^{-x}\text{arc sin}e^x-\int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2-1}}$

$=-e^{-x}\text{arc sin}e^x-\ln(e^{-x}+\sqrt{(e^{-2x}-1)}+C$

$$=x-e^{-x}\arcsin e^{x}-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C \quad (x<0).$$

2162. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx.$

解 $$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^{x})}dx=\int\left(e^{-\frac{x}{2}}-\frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^{x}}\right)\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}dx$$

$$=-2\int \operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}d\left(e^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$-2\int \operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}d\left(\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}+\int\frac{dx}{1+e^{x}}-\left(\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}+\int\left(1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}\right)dx-\left(\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}$$

$$=-2e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}+x-\ln(1+e^{x})-\left(\operatorname{arc\,tg} e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}+C.$$

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^{2}-(e^{x-1}+1)^{2}}.$

解 $$\int \frac{dx}{(e^{x+1}+1)^{2}-(e^{x-1}+1)^{2}}$$

$$=\int \frac{dx}{(e^{x+1}-e^{x-1})(e^{x+1}+e^{x-1}+2)}$$

$$=\int \frac{dx}{e^{2x}(e-e^{-1})(e+e^{-1}+2e^{-x})}$$

$$=\int \frac{dx}{e^{2x}\cdot 2\operatorname{sh}1\cdot(2\operatorname{ch}1+2e^{-x})}$$

$$=\int\frac{dx}{4e^x\,\mathrm{sh}1\cdot(1+e^x\mathrm{ch}1)}$$

$$=\frac{1}{4\mathrm{sh}1}\int\left(\frac{1}{e^x}-\frac{\mathrm{ch}1}{1+e^x\mathrm{ch}1}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\mathrm{sh}1}-\frac{\mathrm{ch}1}{4\mathrm{sh}1}\int\left(1-\frac{e^x\mathrm{ch}1}{1+e^x\mathrm{ch}1}\right)dx$$

$$=-\frac{e^{-x}}{4\mathrm{sh}1}-\frac{\mathrm{cth}1}{4}\left[x-\ln(1+e^x\mathrm{ch}1)\right]+C.$$

2164. $\int\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}\,dx$.

解 $\int\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}\,dx=\int\frac{\mathrm{th}^2x+1}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}dx$

$$=\int\frac{\frac{\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x}{\mathrm{ch}^2x}}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}dx$$

$$=\int\frac{2\mathrm{ch}^2x-1}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}d(\mathrm{th}x)$$

$$=2\int\frac{\mathrm{ch}^2x\,d(\mathrm{th}x)}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}-\int\frac{d(\mathrm{th}x)}{\sqrt{1+\mathrm{th}^2x}}$$

$$=2\int\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{th}^2x+1}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})$$

$$=2\int\frac{\mathrm{ch}x\,dx}{\sqrt{\mathrm{sh}^2x+\mathrm{ch}^2x}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{d(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}x)}{\sqrt{1+2\mathrm{sh}^2x}}-\ln(\mathrm{th}x+\sqrt{1+\mathrm{th}^2x})$$

$$=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{sh}x+\sqrt{1+2\mathrm{sh}^2x})$$

$$-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2x})+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{\sqrt{1+\operatorname{th}^2x}-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$$

$$-\ln(\operatorname{th}x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2x})+C.$$

2165. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx$.

解 $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\cdot e^x dx=\int\left(\frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)e^x dx$

$$=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}dx$$

$$=\int e^x d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\int tg\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}de^x+\int\operatorname{tg}\frac{x}{2}d(e^x)$$

$$=e^x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+C.$$

2166. $\int|x|dx$.

解 $\int|x|dx=(sgnx)\int xdx$

$$=(sgnx)\frac{1}{2}x^2+C=\frac{x|x|}{2}+C.$$

2167. $\int x|x|dx$.

解 $\int x|x|dx=(\operatorname{sgn}x)\int x^2dx$

$=(\operatorname{sgn}x)\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^2|x|}{3}+C$。

2168. $\int(x+|x|)^2dx$。

解 $\int(x+|x|)^2dx=\int(x^2+2x|x|+x^2)dx$

$=\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^2|x|}{3}+C=\frac{2x^2}{3}(x+|x|)+C$。

2169. $\int(|1+x|-|1-x|)dx$。

解 $\int(|1+x|-|1-x|)dx$

$=\int|1+x|d(1+x)+\int|1-x|d(1-x)$

$=\frac{(1+x)|1+x|}{2}{}^{*)}+\frac{(1-x)|1-x|}{2}{}^{*)}+C$。

*) 利用2166题的结果。

2170. $\int e^{-|x|}dx$。

解 当 $x\geqslant 0$ 时，$\int e^{-|x|}dx=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1$，

当 $x<0$ 时，$\int e^{-|x|}dx=\int e^{x}dx=e^{x}+C_2$。

由于$e^{-|x|}$在（$-\infty$，$+\infty$）上连续，故其原函数必在（$-\infty$，$+\infty$）上连续可微，而且任意两个原函数之间差一常数。今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$。由上

述知，必有

$$F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+C_1, & x\geqslant 0,\\ e^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

其中C_1，C_2是两个常数．由于$0=F(0)=\lim\limits_{x\to 0-}F(x)$，即$0=-1+C_1=1+C_2$，因此$C_1=1$，$C_2=-1$，从而

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geqslant 0;\\ e^x-1, & x<0.\end{cases}$$

所以，

$$\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}1-e^{-x}+C, & x\geqslant 0;\\ e^x-1+C, & x<0.\end{cases}$$

2171. $\int max(1,\ x^2)dx$.

解 仿上题，当$|x|\leqslant 1$时，

$$\int max(1,x^2)dx=\int dx=x+C_1;$$

当 $x>1$ 时，$\int max(1,x^2)dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_2$，

当 $x<-1$时，$\int max(1,x^2)dx=\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C_3$.

今求满足$F(1)=1$的原函数$F(x)$．由上述知

$$F(x)=\begin{cases}x+C_1, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_2, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3+C_3, & x<-1.\end{cases}$$

其中C_1,C_2,C_3是三个常数．由于$1=F(1)=\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)$，

即 $1=1+C_1=\frac{1}{3}+C_2$，故 $C_1=0$，$C_2=\frac{2}{3}$。再由 $F(-1)=\lim\limits_{x\to-1-0}F(x)$，得 $-1=-\frac{1}{3}+C_3$，故 $C_3=-\frac{2}{3}$。

由此可知

$$F(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}, & x>1;\\ \frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}, & x<-1.\end{cases}$$

最后得

$$\int max(1,x^2)dx$$

$$=\begin{cases}x+C, & |x|\leqslant 1;\\ \frac{x^3}{3}+\frac{2}{3}sgnx+C, & |x|>1.\end{cases}$$

2172. $\int\varphi(x)dx$，其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离。

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，故其原函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可微。今求满足 $F(0)=0$ 的原函数。由于

$$\varphi(x)=\begin{cases}x-n, & \text{当 } n\leqslant x<n+\frac{1}{2}\text{时};\\ -x+n+1, & \text{当} n+\frac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时}.\end{cases}$$

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当} n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x+C'_n, & \text{当} n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

其中C_n，C'_n是两个常数。由 $\lim\limits_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)-0}F(x)=F\left(n+\frac{1}{2}\right)$，

得$C'_n=C_n-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$。

故

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+C_n, & \text{当} n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2+C_n, & \text{当} n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

由 $\lim\limits_{x\to(n+1)-0}F(x)=F(n+1)$

得递推公式 $C_{n+1}=C_n+n+\frac{3}{4}$。

显然 $0=F(0)=C_0$。由此得 $C_n=\frac{1}{4}n(2n+1)$。

于是

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-nx+\dfrac{1}{4}n(2n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\\ \quad\cdot\left[1-2\left(\dfrac{1}{2}-x+n\right)\right], \text{当} n\leqslant x<n+\dfrac{1}{2}\text{时；}\\ -\dfrac{x^2}{2}+(n+1)x-\dfrac{1}{4}(2n+1)(n+1)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\\ \quad\cdot\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\left[1-2\left(x-n-\dfrac{1}{2}\right)\right],\\ \qquad \text{当} n+\dfrac{1}{2}\leqslant x<n+1\text{时。}\end{cases}$$

记$(x)=x-[x]$表数x去掉其整数部分$[x]$后所剩下的零头部分，那么最后得 $F(x)=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}(-\infty<x<+\infty)$。

故

$$\int\varphi(x)dx=\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\left((x)-\frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1-2\left|(x)-\frac{1}{2}\right|\right\}$$
$$+C\ (-\infty<x<+\infty).$$

2173. $\int[x]|\sin\pi x|dx\quad(x\geqslant 0)$。

解 分别求出在区间$[0,1)$，$[1,2)$，$[2,3)$，…，$[[x],x]$上满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$的增量如下：

在$[0,1)$上，$\int 0\cdot\sin\pi x\,dx=C_1$，$F(1)-F(0)=0$；

在$[1,2)$上，$-\int\sin\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\cos\pi x+C_2$，$F(2)-F(1)=\frac{2}{\pi}$；

在$[2,3)$上，$2\int\sin\pi x dx=-\frac{2}{\pi}\cos\pi x+C_3$，$F(3)-F(2)=\frac{2\cdot 2}{\pi}$；……

在$\left[[x],x\right]$上，$(-1)^{[x]}[x]\int\sin\pi x dx=(-1)^{[x]}$

$$\cdot[x]\left(-\frac{1}{\pi}\right)\cos\pi x+C_{[x]+1},$$

$$F(x)-F([x])=\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x).$$

从而，对于 $x\geqslant 0$，得到

$$\int[x]|\sin\pi x|dx=F(x)+C=(F(1)-F(0))$$

$$+(F(2)-F(1))+(F(3)-F(2))+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C$$

$$=\frac{2}{\pi}+\frac{2\cdot 2}{\pi}+\cdots+\frac{2([x]-1)}{\pi}$$

$$+\frac{(-1)^{[x]}[x]}{\pi}(\cos\pi[x]-\cos\pi x)+C$$

$$=\frac{[x]\cdot([x]-1)}{\pi}+\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot(-1)^{[x]}}{\pi}$$

$$-\frac{(-1)^{[x]}\cdot[x]\cdot\cos\pi x}{\pi}+C$$

$$=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C.$$

2174. $\int f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & 当|x|\leqslant 1;\\ 1-|x|, & 当|x|>1.\end{cases}$

解 当 $|x|\leqslant 1$ 时，

$$\int f(x)dx=\int(1-x^2)dx=x-\frac{x^3}{3}+C_1;$$

当 $x>1$ 时，$\int f(x)dx=\int(1-|x|)dx$

$$=x-\frac{x|x|}{2}+C_2;$$

当$x<-1$时，$\int f(x)dx=\int(1-|x|)dx$

$$=x-\frac{x|x|}{2}+C_3.$$

今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$. 利用$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to1+0}F(x)=F(1)$，$\lim\limits_{x\to-1-0}F(x)=F(-1)$，仿2171题，可得

$$F(x)=\begin{cases} x-\dfrac{x^3}{3}, & |x|\leqslant1; \\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}, & x>1; \\ x-\dfrac{x|x|}{2}-\dfrac{1}{6}, & x<-1. \end{cases}$$

于是

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x-\dfrac{x^3}{3}+C, & |x|\leqslant1; \\ x-\dfrac{x|x|}{2}+\dfrac{1}{6}sgn x+C, & |x|>1. \end{cases}$$

2175. $\int f(x)dx$，式中

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 若 -\infty<x<0; \\ x+1, & 若 0\leqslant x\leqslant1; \\ 2x, & 若 1<x<+\infty. \end{cases}$$

解 当$-\infty<x<0$时，

$$\int f(x)dx=\int dx=x+C_1;$$

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，

$$\int f(x)dx=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C_2;$$

当$1<x<+\infty$时，

$$\int f(x)dx=\int 2xdx=x^2+C_3.$$

今求满足$F(0)=0$的原函数$F(x)$．利用$F(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0-0}F(x)=F(0)$，$\lim\limits_{x\to 1+0}F(x)=F(1)$，仿2171题，可得

$$F(x)=\begin{cases}x, & \text{当}-\infty<x<0\text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}, & \text{当}1<x<+\infty\text{时}.\end{cases}$$

故

$$\int f(x)dx=\begin{cases}x+C, & \text{当}-\infty<x<0\text{时};\\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 1\text{时};\\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & \text{当}1<x<+\infty\text{时}.\end{cases}$$

2176. 求$\int xf''(x)dx$。

解* $\int xf''(x)dx=\int xd[f'(x)]=xf'(x)$

$$-\int f'(x)dx=xf'(x)-f(x)+C.$$

2177. 求 $\int f'(2x)dx$。

解* $\int f'(2x)dx=\frac{1}{2}\int f'(2x)d(2x)=\frac{1}{2}f(2x)+C$.

* 这里暗中分别假定了被积函数f''，f'是连续的.

2178. 设 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$ $(x>0)$，求$f(x)$。

解 由 $f'(x^2)=\frac{1}{x}$，得 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$.

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C.$$

2179. 设$f'(\sin^2x)=\cos^2x$，求$f(x)$。

解 由$f'(\sin^2x)=\cos^2x=1-\sin^2x$得$f'(x)=1-x$.

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(1-x)dx$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+C\quad(|x|\leqslant 1).$$

2180. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<x\leqslant 1;\\ x, & \text{当 } 1<x<+\infty\end{cases}$

及$f(0)=0$，求$f(x)$。

解　设 $t=\ln x$，则

$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0,\\ e^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$

于是，

$$f(x)=\int f'(x)dx=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0;\\ e^x+C_2, & 0<x<+\infty,\end{cases}$$

其中C_1,C_2是两个常数.由假定$f(0)=0$，得$C_1=0$.
再由$f(x)$在$x=0$的连续性，知$f(0)=\lim\limits_{x\to 0+}f(x)$，由此得$C_2=-1$.
于是

$$f(x)=\begin{cases}x, & 当-\infty<x\leqslant 0时;\\ e^x-1, & 当0<x<+\infty时.\end{cases}$$

第四章 定积分

§1. 定积分作为和的极限

1° **黎曼积分的意义** 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则数

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

（式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$）称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**积分**。

极限（1）存在的必要而且充分的条件为：积分下和

$$\underline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$$

及积分上和

$$\overline{S}=\sum_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$$

当 $|\Delta x_i|\to 0$ 时有共同的极限，其中

$$m_i=\inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x) \quad 及 \quad M_i=\sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x)。$$

若等式（1）右端的极限存在，则函数 $f(x)$ 称为在对应的区间上**可积分**（常义的）。特殊情形：(a) 连续函数，(б) 具有有穷个不连续点的有界函数，(в) 单调有界的函数，——在任意的有穷闭区间上为可积分的。

2° **可积分的条件**

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0,$$

式中ω_i为函数$f(x)$在闭区间$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅，上述等式成立为函数$f(x)$于已知闭区间$[a, b]$上可积分的充要条件。

2181. 把区间$[-1, 4]$分为n个相等的子区间，并取这些子区间中点的坐标作自变量ξ_i的值（$i=0, 1, \cdots, n-1$）。求函数$f(x)=1+x$在此区间上的积分和S_n。

解 每一个子区间的长为$\frac{5}{n}$，第i个子区间为$\left(-1+\frac{5i}{n}, -1+\frac{5i}{n}+\frac{5}{n}\right)$，其中点$\xi_i=-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{n}$。于是，所求的积分和为

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{1+\left[-1+\left(i+\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\cdot\frac{5}{n}$$

$$=\frac{25}{n^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(i+\frac{1}{2}\right)=12\frac{1}{2}.$$

2182. 设

（a）$f(x)=x^3$ $[-2\leqslant x\leqslant 3]$；

（б）$f(x)=\sqrt{x}$ $[0\leqslant x\leqslant 1]$；

（в）$f(x)=2^x$ $[0\leqslant x\leqslant 10]$。

把相应区间等分成n份，求给定函数$f(x)$在相应区间上的积分下和$\underline{S}_n$及积分上和$\overline{S}_n$。

解 （a）把区间$[-2, 3]$ n等分，则每一个子区间的

长为 $h=\frac{5}{n}$，且第 i 个子区间为

$$[-2+ih,\ -2+(i+1)h]\ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

若令m_i及M_i分别表示函数$f(x)$在第 i 个子区间上的下确界及上确界，则因$f(x)=x^3$为增函数，所以

$$m_i=(-2+ih)^3,$$

$$M_i=[-2+(i+1)h]^3\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是，

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}(-2+ih)^3h$$

$$=-8nh+12h^2\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i-6h^3\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i^2+h^4\cdot\sum_{i=0}^{n-1}i^3$$

$$=-40+\frac{12\cdot25n(n-1)}{2n^2}-\frac{125(2n^3-3n^2+n)}{n^3}$$

$$+\frac{625(n^4-2n^3+n^2)}{4n^4}$$

$$=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[-2+(i+1)h]^3$$

$$=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{12}{4n^2}.$$

(6) $h=\frac{1}{n}$,

$$m_i=\sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i=\sqrt{\frac{i+1}{n}}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1).$$

于是，

$$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\frac{i}{n}};$$

$$\overline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\sqrt{\frac{i+1}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(в) $h=\frac{10}{n}$,

$m_i=2^{ih}$,

$M_i=2^{(i+1)h}\quad(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$.

于是，

$$\underline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{ih}=\frac{h(2^{nh}-1)}{2^h-1}=\frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)};$$

$$\overline{S}_n=\sum_{i=0}^{n-1}h2^{(i+1)h}=\frac{h2^h(2^{nh}-1)}{2^h-1}$$

$$=\frac{10230\cdot2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}}-1)}.$$

2183．分闭区间〔1，2〕为 n 份；使这分点的横坐标构成一等比级数*)，以求函数 $f(x)=x^4$ 在〔1,2〕上的积分下和。当 $n\to\infty$ 时此和的极限等于甚么？

解 设 $\sqrt[n]{2}=q$ 或 $2=q^n$，分点为

$$1=q^0<q^1<q^2<\cdots<q^n=2.$$

由于 $f(x)=x^4$ 在〔1，2〕上为增函数，故积分下和为

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}[(q^i)^4\cdot(q^{i+1}-q^i)]$$

$$=(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(q^i)^5=\frac{(q-1)(q^{5n}-1)}{q^5-1}$$

$$=\frac{31\cdot(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{32}-1},$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{32}-1}$$

$$=31\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{16}+\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{4}+\sqrt[n]{2}+1}$$

$$=\frac{31}{5}.$$

*) 原题为“使这 n 份的长构成等比级数”，现根据原题答案予以改正。

2184$^+$. 从积分的定义出发，求

$$\int_0^T (v_0+gt)dt,$$

其中v_0及 g 为常数。

解 $f(t)=v_0+gt$ 在 $[0, T]$ 上为增函数 $(T>0)$。

$$h=\frac{T}{n},$$

$$m_i=v_0+igh,$$

$$M_i=v_0+(i+1)gh \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n-1).$$

于是

$$\underline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}(v_0+igh)\cdot h=nv_0h+gh^2\sum_{i=0}^{n-1}i$$

$$=v_0T+\frac{gT^2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

$$=v_0T+\frac{gT^2}{2}-\frac{gT^2}{2n},$$

$$\overline{S_n}=\sum_{i=0}^{n-1}[v_0+(i+1)gh]h=v_0T+\frac{gT^2}{2}+\frac{gT^2}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S_n}=\lim_{n\to\infty}\overline{S_n}=v_0T+\frac{gT^2}{2},$$

所以

$$\int_0^T(v_0+gt)dt=v_0T+\frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段，把积分看作是对应的积分和的极限，来计算定积分。

2185. $\int_{-1}^{2}x^2dx.$

解 将区间$[-1,\ 2]$ n等分，得 $h=\frac{3}{n}$. 取

$$\xi_i=-1+ih\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(-1+ih)^2h=nh-2h^2\sum_{i=0}^{n-1}i+h^3\sum_{i=0}^{n-1}i^2$$

$$=3+\frac{9-9n}{2n^2}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=3.$$

由于$f(x)=x^2$在$[-1, 2]$上连续，故积分$\int_{-1}^{2}x^2dx$是存在的，且它与分法无关，同时也与点的取法无关．因此上述和的极限就是所求的积分值（以后如无特殊情况，不再说明），即定积分

$$\int_{-1}^{2}x^2dx=3.$$

2186. $\int_0^1 a^x dx \quad (a>0)$.

解 当$a\neq 1$时，将区间$[0, 1]$ n等分，得$h=\frac{1}{n}$.

取

$\xi_i=ih \quad (i=0, 1, \cdots, n-1)$.

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}ha^{ih}=\frac{h(a^{nh}-1)}{a^h-1}=\frac{a-1}{n(a^{\frac{1}{n}}-1)}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}}=\frac{a-1}{\ln a},$$

即

$$\int_0^1 a^x dx=\frac{a-1}{\ln a} \quad (a\neq 1).$$

当$a=1$时，积分显然为1.

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$.

解 将区间$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ n 等分，得 $h=\frac{\pi}{2n}$。取

$$\xi_i=ih \quad (i=0, 1, \cdots, n-1)。$$

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1} h\sin ih。$$

由于

$$\sin ih=\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\left[\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right],$$

所以

$$S_n=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2i-1}{2}h-\cos\frac{2i+1}{2}h\right)$$

$$=\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\left(\cos\frac{h}{2}-\cos\frac{2n-1}{2}h\right)。$$

最后得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\pi}{4n}-\cos\frac{2n-1}{4n}\pi\right)$$

$$=1。$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1。$$

2188. $\int_0^x \cos t\,dt$。

解 将区间$[0, x]$ n 等分，得 $h=\frac{x}{n}$。取

$$\xi_i = ih \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1).$$

与2187题类似，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} h\cos ih$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{h}{2\sin\frac{h}{2}}\cdot\left[\sin\frac{h}{2}+\sin\frac{2n-1}{2}h\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\sin\frac{x}{2n}+\sin\frac{(2n-1)x}{2n}\right]$$

$$=\sin x.$$

即

$$\int_0^x \cos t\,dt=\sin x.$$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$ $(0<a<b)$.

解 将区间$[a,\ b]$作 n 等分，设分点为

$$x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

取 $\xi_i=\sqrt{x_i\cdot x_{i+1}}$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,n-1)$. 显然 $\xi_i\in[x_i,\ x_{i+1}]$.

作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1}-x_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{a}-\frac{1}{b},$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

2190. $\int_a^b x^m dx \quad (0<a<b;\ m\neq -1)$.

解 选择诸分点，使它们的横坐标构成一等比级数，即

$$a<aq<aq^2<\cdots<aq^i<\cdots<aq^{n-1}<aq^n=b,$$

其中

$$q=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取$\xi_i=aq^i \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$。作和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^m(aq^{i+1}-aq^i)$$

$$=a^{m+1}(q-1)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}q^{(m+1)i}$$

$$=a^{m+1}(q-1)\frac{q^{n(m+1)}-1}{q^{m+1}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\frac{q-1}{q^{m+1}-1}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} q=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n=(b^{m+1}-a^{m+1})\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{q-1}{q^{m+1}-1}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q^m+q^{m-1}+\cdots+1}$$

$$=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

即

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ $(0<a<b)$.

解 同2190题的分法及取法，得和

$$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(aq^i)^{-1}\cdot(aq^{i+1}-aq^i)$$
$$=n(q-1)$$
$$=n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right).$$

由于 $\lim\limits_{t\to0}\frac{\alpha^t-1}{t}=\ln\alpha$ $(\alpha>0)$（可用洛比塔法则），命 $\alpha=\frac{b}{a}$，而$\frac{1}{n}$是趋向于0的变量，应用这一极限即得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)$$
$$=\ln\frac{b}{a},$$

即

$$\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln\frac{b}{a}.$$

2192. 计算布阿桑积分

$$\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx$$

当：(a) $|\alpha|<1$；　(б) $|\alpha|>1$.

解 因为 $(1-|\alpha|)^2\leqslant 1-2\alpha\cos x+\alpha^2$，所以当 $|\alpha|\neq 1$ 时，被积函数是连续的，于是积分就存在。把区间$[0,\ \pi]$分成 n 个相等部分，即有

$$S_n=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)$$

$$=\frac{\pi}{n}\ln\left[(1+\alpha)^2\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2\alpha\cos\frac{i\pi}{n}+\alpha^2\right)\right].$$

另一方面，我们可以证明

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

事实上，方程 $t^{2n}-1=0$ 共有$2n$个根，记作

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{n-1},\ \varepsilon_n=-1,$$
$$\bar{\varepsilon}_1,\ \bar{\varepsilon}_2,\ \cdots\bar{\varepsilon}_{n-1},$$

其中

$$\varepsilon_i=\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}$$

及

$$\bar{\varepsilon}_i=\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}$$ （$j=\sqrt{-1}$为虚数单位）。

于是

$$t^{2n}-1=(t+1)(t-1)\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i).$$

而

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(\sin^2\frac{i\pi}{n}+\cos^2\frac{i\pi}{n}-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left[\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{i\pi}{n}\right]$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}-j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$\cdot\left(t-\cos\frac{i\pi}{n}+j\sin\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}(t-\varepsilon_i)(t-\bar{\varepsilon}_i)$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{(t+1)(t-1)}$$

$$=\frac{t^{2n}-1}{t^2-1}.$$

即

$$t^{2n}-1=(t^2-1)\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-2t\cos\frac{i\pi}{n}+t^2\right).$$

当 $t=\alpha$ 时，利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n=\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}(\alpha^{2n}-1)\right].$$

于是，(a) 当 $|\alpha|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=0$，即

$$\int_0^\pi(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)dx=0.$$

(б) 当 $|\alpha|>1$ 时，把 S_n 改写成

$$S_n=2\pi\ln|\alpha|+\frac{\pi}{n}\ln\left[\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}\right]$$

后，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha^{2n}-1}{\alpha^{2n}}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=2\pi\ln|\alpha|$，

即

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx=2\pi\ln|a|.$$

2193. 设函数$f(x)$及$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续，证明

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

其中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$，$x_i\leqslant\theta_i\leqslant x_{i+1}$ （$i=0, 1, \cdots, n-1$）及$\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$ （$x_0=a$，$x_n=b$）。

证 因为$f(x)$及$\varphi(x)$均在$[a, b]$上连续，所以它们的乘积$f(x)\varphi(x)$也在$[a, b]$上连续。因此，积分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\xi_i)\Delta x_i \quad (1)$$

存在。

由于$f(x)$在$[a, b]$连续，故有界，即存在常数$M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$ （$a\leqslant x\leqslant b$）；又由于$\varphi(x)$在$[a,b]$连续，故一致连续，因此任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\max|\Delta x_i|<\delta$时，恒有

$$|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|<\frac{\varepsilon}{M(b-a)}(i=0,1,\cdots,n-1).$$

从而

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)|\cdot|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\cdot|\Delta x_i|$$

$$<\sum_{i=0}^{n-1}M\cdot\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot|\Delta x_i|=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}[f(\xi_i)\varphi(\theta_i)-f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i$$
$$=0. \qquad (2)$$

由（1）式和（2）式，最后得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i.$$

2194. 证明不连续的函数：

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$$

于区间〔0，1〕上可积分。

证 首先注意，函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在〔0，1〕上有界，其不连续点是

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$在〔0,1〕的任何部分区间上的振幅$\omega\leqslant 2$。

任给 $\varepsilon>0$。由于$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$上只有有限个间断点，故可积。因此存在$\eta>0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i'|<\eta$，就有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$。显然，若〔$\alpha$，$\beta$〕$\subset\left[\frac{\varepsilon}{5},\ 1\right]$，则对于〔$\alpha$，$\beta$〕的任何分法，只要$\max|\Delta x_i'|<\eta$，也有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{5}$。

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\eta\right\}$。现设 $0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$ 是〔0, 1〕的满足 $\max|\Delta x_i|<\delta$ 的任一分法。设 $x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{5}<x_{i_0+1}$。

由上述，有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{5}$。又，显然

$$\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant 2\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<2\cdot\frac{2\varepsilon}{5}=\frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

于是，$f(x)$在〔0, 1〕可积。

2195. 证明黎曼函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 为无理数},\\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x=\frac{m}{n},\end{cases}$$

（式中 m 及 n（$n\geqslant 1$）为互质的整数）在任何有穷的区间上可积分。

证 为简单起见，我们只考虑闭区间〔0, 1〕（对于一般的有限闭区间〔a, b〕，可类似地讨论之）。

命 $\lambda>0$ 将区间〔0, 1〕分成长度 $\Delta x_i<\lambda$ 的若干部分区间，取任意的自然数 N，将所有的部分区间分成两

类；把包含分母 $n\leqslant N$ 的数$\frac{m}{n}$的区间列入第一类，而把不包含上述数的那些区间列入第二类。对于第一类，由于满足条件 $n\leqslant N$ 的数$\frac{m}{n}$只有有限个，个数记为$k=k_N$，所以第一类区间的个数就不大于$2k$，而它们长度的总和不超出 $2k\lambda$；对于第二类，由于在这些区间内除含有无理数外，仅能含 $n>N$ 的有理数$\frac{m}{n}$，而在这种有理点上，$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}$，所以，振幅$\omega_i$小于$\frac{1}{N}$。

这样一来，和数$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$就分成两部分，分别估计它们的值，即得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<2k_N\lambda+\frac{1}{N}.$$

对于任意给定的$\varepsilon>0$，取定一个$N>\frac{2}{\varepsilon}$，然后取 $\delta=\frac{\varepsilon}{4k_N}$。于是，当$\lambda<\delta$时，必有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0.$$

所以函数$\varphi(x)$在$[0, 1]$上可积分。

2196. 证明函数

$$当\ x\neq 0,\ f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\ 及\ f(0)=0,$$

于闭区间〔0, 1〕上可积分。

证 首先注意，函数$f(x)$在〔0, 1〕上有界，其不连续点是

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

并且，$f(x)$在〔0,1〕的任何部分区间上的振幅$\omega\leqslant 1$。

任给$\varepsilon>0$。由于$f(x)$在$\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$上只有有限个间断点，故可积。因此，存在$\eta>0$，使对$\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，就有$\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}<\frac{\varepsilon}{3}$。显然，若〔$\alpha$, β〕$\subset\left[\frac{\varepsilon}{3},\ 1\right]$，则对于〔$\alpha$, β〕的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有$\sum\limits_{i'}\omega_i'\Delta x_i'<\frac{\varepsilon}{3}$。

令$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{3},\ \eta\right\}$。现设$0=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=1$是〔0, 1〕的满足$\max|\Delta x_i|<\delta$的任一分法。设$x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}<x_{i_0+1}$。由上述，有

$\sum\limits_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}$。又，显然$\sum\limits_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum\limits_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<\frac{2\varepsilon}{3}$。故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=0}^{i_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0\ .$$

由此可知，$f(x)$在$[0,\ 1]$上可积。

2197. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x)=\begin{cases}0\ , & \text{若 } x \text{ 为无理数,}\\ 1\ , & \text{若 } x \text{ 为有理数,}\end{cases}$$

于任意区间上不可积分。

证 在任意区间$[a,\ b]$的任何部分区间上均有

$$\omega_i=1\ ,$$

所以$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=b-a$，它不趋于零。因此函数$\chi(x)$在$[a,\ b]$上不可积分。

2198. 设函数$f(x)$于$[a,\ b]$上可积分，且

$$f_n(x)=\sup f(x)\quad 当\ x_i<x\leqslant x_{i+1},$$

其中 $x_i=a+\dfrac{i}{n}\ (b-a)\ \left(\begin{matrix}i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1;\\ n=1,\ 2,\ \cdots\cdots\end{matrix}\right)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$

证 $f_n(x)$ 是不超过$n+1$个间断点的阶梯函数，因此$f_n(x)$在$[a,\ b]$上可积分，于是

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b \left| f_n(x)-f(x) \right| dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f_n(x)-f(x) \right| dx$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \longrightarrow 0$$

$$\left(当\ max|\Delta x_i| = \frac{b-a}{n} \to 0\ 时\right),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

2199．证明：若函数 $f(x)$ 于〔a，b〕上可积分，则有连续函数 $\varphi_n(x)$（$n=1$，2，…）的叙列，使

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^c \varphi_n(x)dx，当\ a\leqslant c\leqslant b.$$

证 将区间〔a，b〕作 n 等分，设分点为

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n-1}^{(n)}<x_n^{(n)}=b,$$

即 $x_i^{(n)}=a+\frac{i}{n}(b-a)$，$i=0$，1，…，$n$。

在 $\Delta x_i^{(n)}=[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$上 令 $\varphi_n(x)$ 为 过 点 $(x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{n}))$ 及 $(x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)}))$的直线，即 当 $x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$时，令

$$\varphi_n(x)=f(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}\left[f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})\right],$$

则$\varphi_n(x)$是〔a，b〕上的连续函数，因此，它是可积分的。

若令 $m_i^{(n)}$，$M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上的下确界，上确界及振幅，则当 $x\in[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$时，

$$m_i^{(n)}\leqslant\varphi_n(x)\leqslant M_i^{(n)},\quad m_i^{(n)}\leqslant f(x)\leqslant M_i^{(n)},$$

从而

$$|\varphi_n(x)-f(x)|\leqslant\omega_i^{(n)}.$$

于是，当 $a\leqslant c\leqslant b$ 时，

$$\left|\int_a^c f(x)dx-\int_a^c\varphi_n(x)dx\right|$$

$$\leqslant\int_a^c\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$\leqslant\int_a^b\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}}\left|f(x)-\varphi_n(x)\right|dx$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}.$$

由于$f(x)$在$[a, b]$上可积分，因此，

当 $max|\Delta x_i^{(n)}|=\frac{b-a}{n}\to 0$ 时，必有

$$\sum_{i=1}^n\omega_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\longrightarrow 0.$$

由此可知

$$\int_a^c f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^c\varphi_n(x)dx\quad(a\leqslant c\leqslant b).$$

2200．证明：若有界的函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上可积分，

则其绝对值$|f(x)|$于$[a, b]$上也可积分，并且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

证 对于区间$[x_i, x_{i+1}]$上任意两点x'及x''，总有

$$\left||f(x')|-|f(x'')|\right| \leqslant |f(x')-f(x'')|,$$

所以函数$|f(x)|$在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅ω_i^*不超过$f(x)$在此区间上的振幅ω_i，因而

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i^*\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i \longrightarrow 0,$$

即$|f(x)|$在$[a, b]$上可积分。

其次，因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b \left|f(x)\right|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|dx,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

2201．若函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上绝对可积（即积分$\int_a^b \left|f(x)\right|dx$存在）．这个函数在$[a, b]$上是否为可积分的函数？

解 一般地说，不．例如函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

$|f(x)|=1$，它在$[a, b]$上连续，因此它在$[a, b]$上可积。但对于函数$f(x)$而言，在$[a, b]$的任一部分区间上$\omega_i=2$，所以

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=2(b-a).$$

它不趋向于零，于是函数$f(x)$在$[a, b]$上不可积分.

2202. 设函数$\varphi(x)$于闭区间$[A,B]$上有定义并连续，函数$f(x)$于$[a, b]$上可积分，并且当$a\leqslant x\leqslant b$时$A\leqslant f(x)\leqslant B$。证明函数$\varphi[f(x)]$于$[a, b]$上可积分.

证 任给$\varepsilon>0$。根据函数$\varphi(x)$在$[A, B]$的一致连续性，存在$\eta>0$，使得在$[A, B]$中长度小于η的任一闭区间上，函数φ的振幅都小于$\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，用$\Omega$表$\varphi(x)$在$[A, B]$上的振幅。由$f(x)$在$[a, b]$的可积性，知必有$\delta>0$存在，使对$[a,b]$的任一分法，只要$max|\Delta x_i|<\delta$，就有$\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i<\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}$。($\omega_i(f)$表$f(x)$在$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅)。

下证对$[a, b]$的任何分法，只要$max|\Delta x_i|<\delta$，就有

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i<\varepsilon.$$

事实上，将诸区间$[x_i, x_{i+1}]$分成两组，第一组是满足$\omega_i(f)<\eta$的（其下标以"i'"记之），第二组是满足$\omega_i(f)\geqslant\eta$的（下标以"i''"记之）。

于是，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i$$

$$=\sum_{i'}\omega_{i'}(\varphi(f))\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(\varphi(f))\Delta x_{i''}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_{i'}+\Omega\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

但

$$\frac{\eta\varepsilon}{2\Omega}>\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta x_i$$

$$=\sum_{i'}\omega_{i'}(f)\Delta x_{i'}+\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}$$

$$\geqslant\sum_{i''}\omega_{i''}(f)\Delta x_{i''}\geqslant\eta\sum_{i''}\Delta x_{i''},$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi(f))\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)+\Omega\cdot\frac{\varepsilon}{2\Omega}=\varepsilon.$$

由此可知，$\varphi[f(x)]$在$[a,b]$上可积.

2203. 若函数$f(x)$及$\varphi(x)$可积分，则函数$f[\varphi(x)]$是否也必定可积分？

解 未必．例如函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x=0,\\ 1 & 若\ x\neq 0,\end{cases}$$

及$\varphi(x)$为黎曼函数（参阅2195题）.

它们在任何有穷的区间上均可积（前者不连续点仅为原点一个，且是有界函数，因而是可积分的）.

但 $f[\varphi(x)]=\chi(x)$，利用2197题的结果得知它在任何有穷的区间上不可积分.

2204. 设函数$f(x)$于闭区间$[A, B]$上可积分，证明函数$f(x)$有积分的连续性，即是说

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0,$$

式中$[a, b]\subset[A, B]$.

证 方法一：

不妨设$A<a$，$b<B$. 由于$f(x)$在$[A, B]$可积，故任给$\varepsilon>0$，存在$\eta>0$，使对$[A, B]$的任何分法，只要$\max|\Delta x_i|<\eta$，就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i<\varepsilon;$$

显然，对$[A, B]$的任一子区间$[A', B']$的任何分法，只要$\max|\Delta x_{i'}|<\eta$，也有

$$\sum_{i'} \omega_{i'} \Delta x_{i'}<\varepsilon. \qquad (1)$$

今设$0<h<\delta=\min\left\{\frac{\eta}{2}, \frac{B-b}{3}\right\}$，则对于$h$，存在正整数$n=n(h)$，使有

$$a+(2n-2)h<b\leqslant a+2nh<a+(2n+1)h<B.$$

用ω_i表$f(x)$在$[a+ih, a+(i+2)h]$上的振幅，则

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^{a+2nh} |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$=\sum_{i=0}^{2n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h}|f(x+h)-f(x)|dx\leqslant\sum_{i=0}^{2n-1}\omega_i h$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h.$$

显然，$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}\cdot 2h$ 是对于区间 $[a,\ a+2nh]$ 的分法 $a<a+2h<a+4h<\cdots<a+2nh$ 所作的（1）式中的和，而 $\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h$ 是对于区间 $[a+h,\ a+(2n+1)h]$ 的分法

$a+h<a+3h<a+5h<\cdots<a+(2n+1)h$ 所作的（1）式中的和。故

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i}2h<\varepsilon,\qquad \sum_{i=0}^{n-1}\omega_{2i+1}2h<\varepsilon.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

同理可证

$$\lim_{h\to 0-}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

于是，得

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

方法二：

由2199题的结果可知：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于$f(x)$在$[A, B]$上可积，故存在$[A, B]$上的连续函数$\varphi(x)$，使

$$\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于$\varphi(x)$在$[A, B]$上一致连续，故存在 $\delta>0$，使当$|x'-x''|<\delta$ ($x'\in[A, B]$, $x''\in[A, B]$)时，恒有

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是，当$|h|<\delta$时，

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx$$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx$$

$$+\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant 2\int_A^B |f(x)-\varphi(x)|dx$$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx$$

$$< 2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

2205. 设函数$f(x)$于闭区间$[a, b]$上可积分，证明等式

$$\int_a^b f^2(x)dx=0$$

当而且仅当对属于闭区间$[a, b]$内函数$f(x)$连续的一切点有$f(x)=0$时方成立。

证 先证必要性：

采用反证法。设$f(x)$在点x_0连续，但$f(x_0)\neq 0$，则存在$\delta>0$，$[x_0-\delta, x_0+\delta]\subset[a, b]$，使当$|x-x_0|\leqslant\delta$时

$$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而

$$\int_a^b f^2(x)dx\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f^2(x)dx>\frac{f^2(x_0)}{4}\cdot 2\delta$$

$$=\frac{\delta\cdot f^2(x_0)}{2}>0.$$

这与假设$\int_a^b f^2(x)dx=0$矛盾。

再证充分性：

也即要证，$f(x)$在$[a, b]$上可积条件下，假设$f(x)$在一切连续点x_0上均有$f(x_0)=0$，则必有

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0.$$

证明分两个部分。第一，首先要指出当 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积时，$f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中必定是稠密的。此处所谓"稠密"性是指：对于任意区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 总存在一点 $x_0 \in [\alpha, \beta]$，使 $f(x)$ 在 x_0 连续。第二，利用假设，并借助于稠密性，可证得充分性。现在先证第二部分，如下：由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0 \in X$ 时有 $f(x_0) = 0$ 的假设。便知，对于区间 $[a, b]$ 的任一分法，均可适当地取 $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$，使 $f(\xi_i) = 0$。从而积分和 $\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0$。由此，再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性，便有

$$\int_a^b f^2(x)dx = \lim_{\max_i |\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

如今再补证第一部分：应当首先指明，若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，则对任给的 $\varepsilon > 0$，总存在 $[\alpha, \beta]$ 的子区间 $[\alpha', \beta']$ 使得振幅

$$\omega(\alpha', \beta') < \varepsilon.$$

事实上，如果上述结论不成立，则存在一个 $\varepsilon_0 > 0$，使对于 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法，有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \geqslant \varepsilon_0 \sum_i \Delta x = \varepsilon_0(\beta - \alpha) > 0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积矛盾，因此，结论为真。

今取$[\alpha,\beta]$为$[a_1,b_1]$。由于$f(x)$在$\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]$上可积，故存在区间$[a_2,b_2]\subset\left[a_1+\frac{b_1-a_1}{4},\ b_1-\frac{b_1-a_1}{4}\right]\subset[a_1,b_1]$，使

$$\omega[a_2,\ b_2]<\frac{1}{2}.$$

同样，存在区间$[a_3,b_3]\subset\left[a_2+\frac{b_2-a_2}{4},\ b_2-\frac{b_2-a_2}{4}\right]\subset[a_2,b_2]$，使

$$\omega[a_3,\ b_3]<\frac{1}{3}.$$

这样继续下去，得一串闭区间$[a_n,b_n]$ $(n=1,2,3,\cdots)$，满足

$$\alpha=a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1=\beta,$$

并且$b_n-a_n\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}}\to 0$，$\omega[a_n,b_n]<\frac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

由区间套定理，诸$[a_n,b_n]$具有唯一的公共点c。显然$a_n<c<b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$。下证$f(x)$在点c连续。

任给$\varepsilon>0$，取正整数n_0使$n_0>\frac{1}{\varepsilon}$。再取$\delta>0$使$(c-\delta,\ c+\delta)\subset[a_{n_0},\ b_{n_0}]$。于是，当$|x-c|<\delta$时，必有$|f(x)-f(c)|\leqslant\omega[a_{n_0},\ b_{n_0}]<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$。

故$f(x)$在点 $x=c$ 连续。到此，充分性证毕。

§2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼兹公式　若函数$f(x)$于闭区间〔a, b〕上有定义而且连续，$F(x)$为它的原函数（即$F'(x)=f(x)$），则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b\text{*}.$$

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义表示由曲线 $y=f(x)$，OX 轴及垂直于OX轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 四者所围成的代数面积 S（图 4.1）。

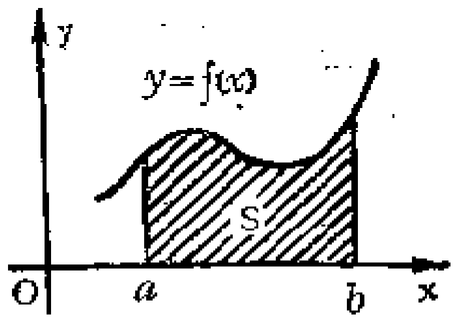

图 4.1

2° 部分积分法　若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于闭区间〔a, b〕上连续并有连续导数$f'(x)$和$g'(x)$，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

3° 变数代换　若：（1）函数$f(x)$于闭区间〔a, b〕内连续，（2）函数$\varphi(t)$及其导数$\varphi'(t)$皆于闭区间〔α, β〕上连续，其中 $a=\varphi(\alpha)$；$b=\varphi(\beta)$；（3）复合函数$f[\varphi(t)]$于闭区间〔α, β〕上有定义并连续，则

---

* 本节个别题是收敛的广义积分，仍按此公式计算。——题解编者注。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式，求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积：

2206. $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx$.

解 $\int_{-1}^{8}\sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^{8} = 11\frac{1}{4}$ （图 4.2）.

2207. $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

解 $\int_0^{\pi}\sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = 2$ （图 4.3）.

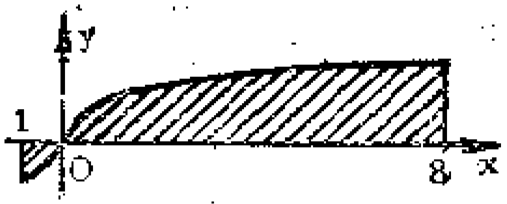

图 4.2

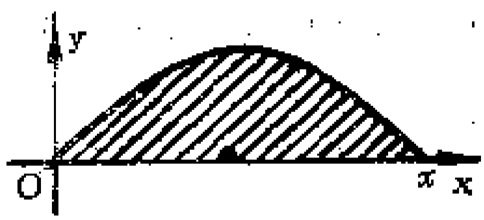

图 4.3

2208. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

解 $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg}x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ （图 4.4）.

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$ （图 4.5）.

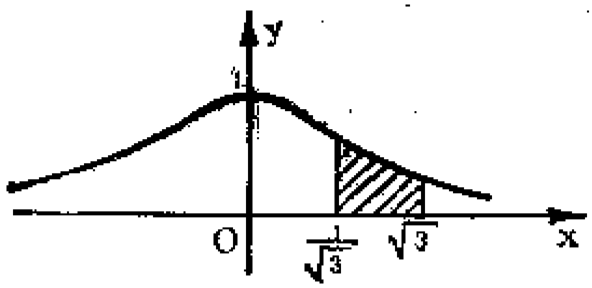

图 4.4

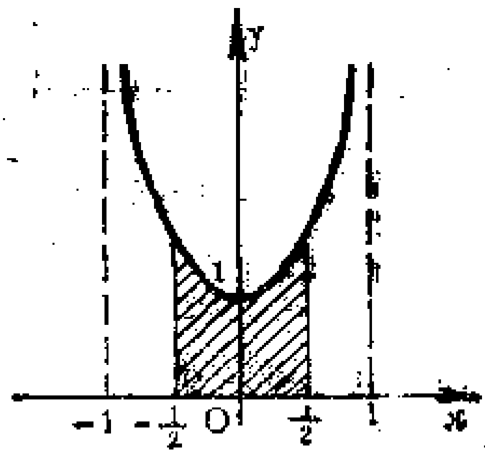

图 4.5

2210. $\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

解 $$\int_{sh1}^{sh2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_{sh1}^{sh2}$$

$$=\text{arcsh}\,x\Big|_{sh1}^{sh2}=1$$ (图4.6)

2212. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}\quad(0<\alpha<\pi)$.

解 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\text{arc tg}\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left[\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\alpha}{2}\right)+\text{arc tg}\left(\text{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{\alpha}{2}+\text{arc tg}\left[\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2\sin\alpha}\quad(\text{图 }4.8).$$

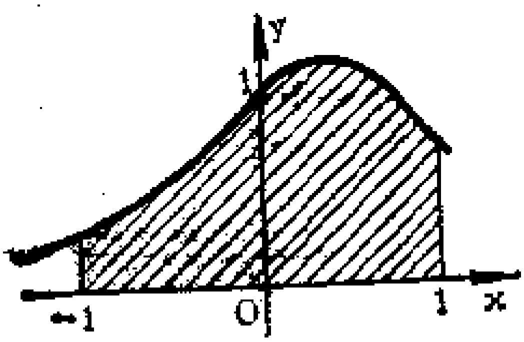

图 4.8

注 以下图形从略。

2213. $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$

$(0\leqslant\varepsilon<1)$.

解 $\int_{0}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+\int_{\pi}^{0}\frac{d(2\pi-x)}{1+\varepsilon\cos(2\pi-x)}$$

$$=2\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\varepsilon\cos x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-\varepsilon^2\cos^2 x}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1-\varepsilon^2)\cos^2 x+\sin^2 x}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{tg}^2 x+(1-\varepsilon^2)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)$$

$$=\frac{4}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

2214. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$ （$|a|<1$，$|b|<1$，$ab>0$）。

解 在公式

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{A}}\ln\left|Ax+\frac{B}{2}+\sqrt{A}\cdot\sqrt{Ax^2+Bx+C}\right|+C^{*)}$$

中，设

$$Ax^2+Bx+C=(1-2ax+a^2)(1-2bx^2+b^2),$$

两端求导数得

$$Ax+\frac{B}{2}=-b(1-2ax+a^2)-a(1-2bx+b^2).$$

由此推得，当 $x=1$ 时，在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2-b(1-a)^2+2\sqrt{ab}(1-a)(1-b)$$
$$=-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当$x=-1$时，得到值$-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$。于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*) 利用1850题的结果。

2215. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\quad(ab\neq 0).$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$

$$=\frac{1}{|ab|}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{|a|\operatorname{tg}x}{|b|}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}{}^{*)}=\frac{\pi}{2|ab|}.$$

*) 利用2030题的结果。

2216. 设

(a) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$；　　(б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sec^2x\,dx}{2+\operatorname{tg}^2x}$， (в) $\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)dx$。

说明为甚么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果。

解 (a) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2<0\text{。}$$

这是不正确的。事实上，由于函数$f(x)=\frac{1}{x^2}>0$，所以当积分存在时，其值必大于零。原因在于该函数在区间[−1，1]上有第二类间断点 $x=0$。因而不能运用公式。

(б) 若应用公式得

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{\sec^2 x dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_{0}^{2\pi}=0\text{。}$$

但$\frac{\sec^2 x}{2+\operatorname{tg}^2 x}>0$，故积分若存在，必为正。原因在于原函数在〔0，2π〕上 $x=\frac{\pi}{2}$， $x=\frac{3\pi}{2}$为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

(в) 若应用公式得

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}>0\text{。}$$

这是不正确的，因为$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{1+x^2}<0$。所以，积分值必为负。原因在于原函数$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$在$x=0$为第一类不连续点，故不能直接运用公式。

2217. 求$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$。

解 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\left.\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right|_{-1}^{0}+\left.\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right|_{0}^{1}=\frac{2}{3}.$$

注意，被积函数$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)$显然在$x=0$间断，但易知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)=0$，故$x=0$是可去间断点。若我们补充定义被积函数在$x=0$时的值为0，则被积函数在整个〔$-1$，1〕上都是连续的，从而积分$\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$存在。以后，凡是被积函数有可去间断点的情形，我们都按此法处理，理解为连

续函数的积分。另外，

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}$$

应理解为

$$\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\lim_{\eta\to0+}\int_{-1}^{-\eta}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$$

$$=\lim_{\eta\to0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\Bigg|_{-1}^{-\eta}=\frac{1}{3}.$$

以后，凡是定积分存在而原函数有间断点的情况，都按此理解，省去取极限的式子，但应理解为取极限的结果。

2218. 求 $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$。

解 $\int_{0}^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$

$$=\sum_{k=1}^{100}\sqrt{2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\sqrt{\sin^2x}\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{100}\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^2x}\,dx$$

$$=100\sqrt{2}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=200\sqrt{2}.$$

利用定积分求下列和的极限值：

2219. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

解 这是和的极限，该极限即为函数 $f(x)=x$ 在区间

[0, 1]上的定积分。事实上，函数$f(x)=x$在[0, 1]上是连续的，因而可积分。这样便可将[0, 1] n等份，并取ξ_i为小区间的左端点，这样作出的和的极限就是题中所要求的极限。于是，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

以下各题不再说明。

2220. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

2221. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

解 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

2222. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)}{n}\pi\right]$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}.$$

2223. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ $(p>0)$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.$

2224. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right).$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$

$$=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

2225. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\ln i\right)-n\ln n\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\,dx^{*)}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x\,dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}x(\ln x-1)\Big|_\varepsilon^1=-1.$$

从而，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

*) 参看后面2388题。

2226. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$

$$=\int_0^1 f(a+(b-a)x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

弃掉高阶同等无穷小，求下列和的极限值：

2227. $\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\sin\frac{2\pi}{n^2}\right.$

$$\left.+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}\right].$$

解 由于对于一切 $k<n$，$3<n$ 有

$$0\leqslant\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\leqslant\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}$$

$$\leqslant\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{\sin\frac{k\pi}{n^2}}{\cos\frac{k\pi}{n^2}}\left(1-\cos\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

从而，

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{2k\pi}{n^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\leqslant 2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) \to 0 \quad (n\to+\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{k\pi}{n^2}$$

$$-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k\pi}{n^2}-\sin\frac{k\pi}{n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{k^2\pi}{n^2}\right)$$

$$=\int_0^1 \pi(x+x^2)dx=\frac{5\pi}{6}.$$

2228. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

解 由于

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n),$$

式中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{dx}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2229. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}\quad(x>0).$

解 由于

$$0\leqslant\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}-\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)-\left(x+\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}+\left(x+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\leqslant\frac{1}{2x}\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$

故

$$0\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)\leqslant\frac{1}{2xn^2}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4x}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}\to 0\quad (n\to\infty).$$

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1(x+t)dt=x+\frac{1}{2}.$$

2230. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解 由于

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+\frac{1}{k}}=\frac{1}{n(nk+1)}<\frac{1}{n^2},$$

故

$$0<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}<\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}<\frac{2}{n}\to 0$$

$(n\to\infty)$.

于是，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}\cdot 2^{\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 2^x dx=\frac{1}{\ln 2}.$$

2231. 求：$\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx$，$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx$，

$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx$。

解 $\frac{d}{dx}\int_a^b \sin x^2 dx = 0$

$$\frac{d}{da}\int_a^b \sin x^2 dx = -\frac{d}{da}\int_b^a \sin x^2 dx$$

$$= -\sin a^2$$

$\frac{d}{db}\int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2$。

2232. 求：(a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$；

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$；

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$。

解 (a) $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$

$$=\left(\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$=2x\cdot\sqrt{1+x^4}；$$

(б) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

$$=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}+\frac{d}{dx}\int_{0}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{d}{dx}(x^3)\cdot\frac{d}{d(x^3)}\int_0^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$-\frac{d}{dx}(x^2)\cdot\frac{d}{d(x^2)}\int_0^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};$$

(в) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$$=\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{0}\cos(\pi t^2)dt$$

$$+\frac{d}{dx}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$=-\frac{d(\sin x)}{dx}\cdot\frac{d}{d(\sin x)}\int_0^{\sin x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$+\frac{d(\cos x)}{dx}\cdot\frac{d}{d(\cos x)}\int_0^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$$

$$=-\cos x\cdot\cos(\pi\sin^2 x)$$

$$-\sin x\cdot\cos(\pi\cos^2 x)\ ^{*)}$$

$$=(\sin x-\cos x)\cdot\cos(\pi\sin^2 x).$$

*) $\cos(\pi\cos^2 x)=\cos(\pi-\pi\sin^2 x)$

$$=-\cos(\pi\sin^2 x).$$

2233．求：

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$;　(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$.

解 (а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x^2)=1$;

(б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x (\operatorname{arc\,tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\operatorname{arc\,tg} x)^2}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$=\dfrac{\pi^2}{4}$;

(в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}dx}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\cdot\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{x^2}dx}{e^{x^2}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2234. 证明

当 $x\to\infty$时，$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\dfrac{1}{2x}e^{x^2}$.

证 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x e^{x^2}dx}{\frac{1}{2x}e^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right)}=1,$$

所以，当 $x\to\infty$时，

$$\int_0^x e^{x^2}dx\sim\frac{1}{2x}e^{x^2}.$$

2235．求：

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}.$$

解
$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x}\sqrt{\sin x}\,dx}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)}(\sin x)'}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)}(\operatorname{tg} x)'}.$$

$$=\lim_{x\to+0}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}}$$

$$\cdot\lim_{x\to+0}\cos^3 x=1.$$

2236．设$f(x)$为连续正值函数，证明当 $x\geqslant 0$ 时，函数

$$\varphi(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

增加。

证 首先注意，$\lim\limits_{x\to 0+}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{xf(x)}{f(x)}=0$，故若规定 $\varphi(0)=0$，则 $\varphi(x)$ 是 $x\geqslant 0$ 上的连续函数。另外，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\left\{xf(x)\int_0^x f(t)dt\right.$$

$$\left.-f(x)\int_0^x tf(t)dt\right\}$$

$$=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}\cdot\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

>0 （当 $x>0$ 时），

所以，$\varphi(x)$当 $x\geqslant 0$ 时是增加的。

2237．求

(a) $\int_0^2 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 当 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 当 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(б) $\int_0^1 f(x)dx$，设 $f(x)=\begin{cases}x, & 当 0\leqslant x\leqslant t, \\ t\cdot\frac{1-x}{1-t}, & 当 t\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

解 (a) $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx$

$$=\frac{5}{6}.$$

(б) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^t x\,dx+\int_t^1 t\cdot\frac{1-x}{1-t}dx$

$$=\frac{t}{2}.$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数α的函数作出积分$I=I(\alpha)$的图形．设：

(а) $I=\int_0^1 x|x-\alpha|dx$;

(б) $I=\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}dx$;

(в) $I=\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$.

解 (а) 分三种情况：

1° 若 $\alpha<0$，则

$$I=\int_0^1 x(x-\alpha)dx=\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2};$$

2° 若 $\alpha>1$，则

$$I=\int_0^1 x(\alpha-x)dx=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3};$$

3° 若$0\leqslant\alpha\leqslant 1$，则

$$I=\int_0^\alpha x(\alpha-x)dx+\int_\alpha^1 x(x-\alpha)dx$$

$$=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{3}.$$

于是，

$$\int_0^1 x|x-\alpha|dx=\begin{cases}\dfrac{1}{3}-\dfrac{\alpha}{2}, & \text{当}\alpha<0,\\ \dfrac{\alpha^3}{3}-\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{3}, & \text{当}0\leqslant\alpha\leqslant1,\\ \dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{1}{3}, & \text{当}\alpha>1\text{（图4.9）。}\end{cases}$$

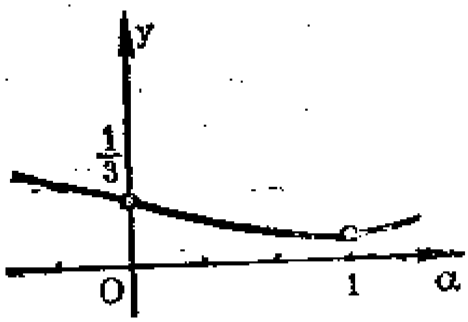

图 4.9

(6) 分两种情况：

1° 若$|\alpha|\leqslant1$，则

$$I=\int_0^\pi\frac{\sin^2x}{1+2\cos x+\alpha^2}dx$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi\frac{4\alpha^2(1-\cos^2x)dx}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi\frac{[(1+\alpha^2)^2-4\alpha^2\cos^2x]+[4\alpha^2-(1+\alpha^2)^2]}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}dx$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\pi[(1+\alpha^2)-2\alpha\cos x]dx-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\int_0^\pi\frac{dx}{(1+\alpha^2)+2\alpha\cos x}{}^{*)}$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\left[(1+\alpha^2)x-2\alpha\sin x\right]\Big|_0^{\pi}-\frac{(1-\alpha^2)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{1-\alpha^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(1-\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2}.$$

2° 若$|\alpha|>1$，则同上述情况类似有

$$I=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)^2}{4\alpha^2}$$

$$\cdot\frac{2}{\alpha^2-1}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha^2-2\alpha}{1+\alpha^2+2\alpha}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{(1+\alpha^2)\pi}{4\alpha^2}-\frac{(\alpha^2-1)\pi}{4\alpha^2}=\frac{\pi}{2\alpha^2}.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当}|\alpha|\leqslant 1;\\[2ex] \dfrac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{当}|\alpha|>1.\end{cases}\qquad\text{(图4.10)}$$

*) 利用2028题(a)的结果。

(в) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}}$

$$=\frac{1}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\cos x}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases} 2, & \text{当}|\alpha|\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{|\alpha|}, & \text{当}|\alpha|>1. \end{cases}\qquad (\text{图}4.11)$$

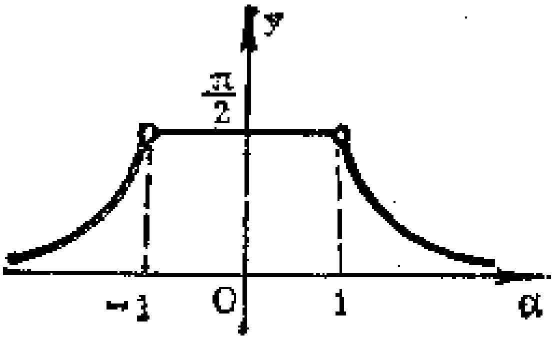

图 4.10

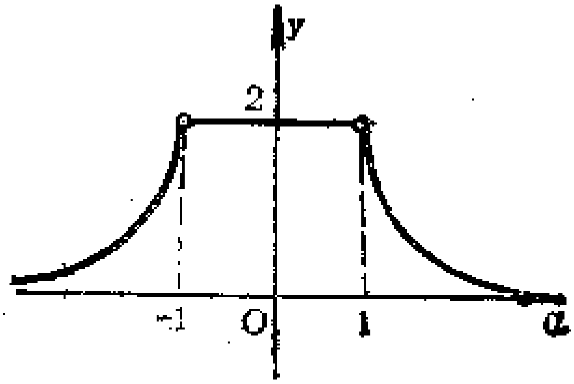

图 4.11

利用部分积分法的公式，求下列定积分：

2239. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx$.

解 $$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,dx = -\int_0^{\ln 2} x\,d(e^{-x})$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

2240. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$.

解 $$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx = \pi.$$

2241. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$.

解 $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x \sin x dx$

$$= 2\left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx\right)$$

$$= 4\pi.$$

2242⁺. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x| dx$.

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\lg x| dx$

$$= \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\lg x)\, dx + \int_{1}^{e} \lg x dx$$

$$= \left(-x\lg x\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{\ln 10} dx\right) + x \lg x \Big|_1^e$$

$$- \int_1^e \frac{1}{\ln 10} dx$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)\lg e.$$

2243. $\int_0^1 \arccos x dx$.

解 $\int_0^1 \arccos x dx$

$$= x \arccos x \Big|_0^1 - \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon}=1.$$

2244[+]. $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$.

解 $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\mathrm{arctg}\,x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{3}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}$$

$$=2\mathrm{arc\,tg}\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

利用适当的变数代换，求下列定积分：

2245. $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

解 设$\sqrt{5-4x}=t$，则

$$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\int_3^1\frac{5-t^2}{8}dt=\frac{1}{6}.$$

2246. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\quad(a>0)$.

解 设$x=a\sin t$，则

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi a^4}{16}.$$

2247. $\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 设 $t=\frac{1}{x+1}$，则

$$\int_0^{0.75}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(2t-1+\sqrt{2t^2-2t+2}\right)\Big|_{\frac{4}{7}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7}+\sqrt{\frac{50}{49}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

2248. $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

解 设 $\sqrt{e^x-1}=t$，则

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$$

$$=2\int_0^1\frac{t^2\,dt}{1+t^2}=2\,(t-\operatorname{arc\,tg} t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

2249. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

解 设$\sqrt{x}=t$，则

$$\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=(\arcsin t)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{4}.$$

2250．假设 $x-\frac{1}{x}=t$，来计算积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx.$$

解 由于被积函数是偶函数，于是，

$$\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

$$=2\int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\lim_{N\to-\infty}2\int_N^0\frac{dt}{t^2+2}$$

$$=\lim_{N\to-\infty}\sqrt{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_N^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2251．设：

(a) $\int_{-1}^{1}dx$，$t=x^{\frac{2}{3}}$；

(б) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$，$x=\frac{1}{t}$；

(в) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$，$\operatorname{tg}x=t$。

说明为甚么用$\varphi(t)$代换x会引致不正确的结果。

解 (a) $\int_{-1}^{1}dx=2$。但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$，则得

$$\int_{-1}^{1} dx = \pm\frac{3}{2}\int_{1}^{1} t^{\frac{1}{2}}dt = 0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的。

（б） $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = -\int_{-1}^{1}\frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果：$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = 0$.

其错误在于 $x=\frac{1}{t}$，当 $t=0$（0 属于 $[-1,1]$）时不连续。

（в） $\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$ 大于零，但若作代换 $t=\text{tg}\, x$，则得

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\,(\sqrt{2}\,\text{tg}\, x)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

其错误在于 $t=\text{tg}\, x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处不连续。

2252. 在积分

$$\int_0^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

中，令 $x=\sin t$ 是否可以？

解 不可以，因为 $\sin t = x$ 不可能大于 1。

2253. 于积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 中，当作变数的代换 $x=\sin t$ 时，可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限？

解 可以。因为满足定积分换元的条件。

事实上，

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,d(\sin t)$$

$$=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t\,dt=-\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$$

2254. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 内连续，则

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

证 设 $x=a+(b-a)t$，则 $dx=(b-a)dt$。

代入得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)t]dt,$$

即

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]dx.$$

2255. 证明：等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx\quad(a>0).$$

证 设 $x=\sqrt{t}$，则

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx$$

$$=\int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}}\ f(t)\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}\int_0^{a^2}\ tf(t)dt.$$

即

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx=\frac{1}{2}\int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

2256．设$f(x)$为闭区间$[A,B]\supset[a,b]$上的连续函数，当$A-a<x<B-b$时，求$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$。

解　$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x+y)dy$

$$=\frac{d}{dx}\int_{a+x}^{b+x} f(y)dy=f(b+x)-f(a+x).$$

2257．证明：若函数$f(x)$于闭区间$[0,1]$上连续，则

(a)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(б)　$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

证：(a) 设$\frac{\pi}{2}-t=x$，则$dx=-dt$，且

$$f(\sin x)=f(\cos t).$$

代入得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt,$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

(6) 设 $\pi-t=x$，则 $dx=-dt$，且

$$xf(\sin x)=(\pi-t)f(\sin t).$$

代入得

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=-\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\,dt-\int_0^{\pi} t\,f(\sin t)dt,$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

2258. 证明：若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[-l, l]$ 上连续，则

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时，

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx=2\int_0^{l} f(x)dx;$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时，

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=0.$$

给出这些事实的几何解释。

证 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数，即 $f(x)=f(-x)$，($x\in[-l, l]$)。于是设 $x=-t$，则有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-l}^{0} f(-x)d(-x) + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= -\int_{l}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{l} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=f(-x)$，故图形关于 Oy 轴对称．于是由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=-l$ 及 $x=l$ 所围成图形的面积为由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=0$ 及 $x=l$ 所围成的图形的面积 S 的两倍(图4.12)。

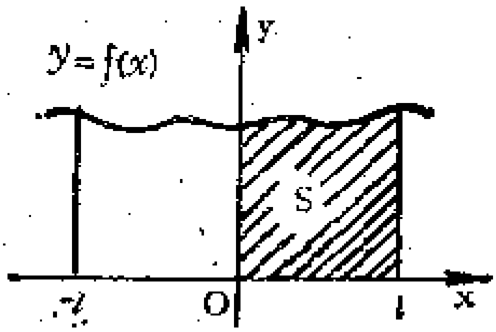

图 4.12

(2) 由于 $f(x)=-f(-x)$，设 $x=-t$，则

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$= -\int_{-l}^{0} f(-x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$= \int_{l}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{l} f(x)dx = 0\,.$$

其几何解释如下：

由于 $f(x)=-f(-x)$，故图形关于原点对称。于是由 $-l$ 到 0 之间所围之面积，与由 0 到 l 之间所围成之面积绝对值相等，符号相反，故其面积的代数和为零（图4.13）。

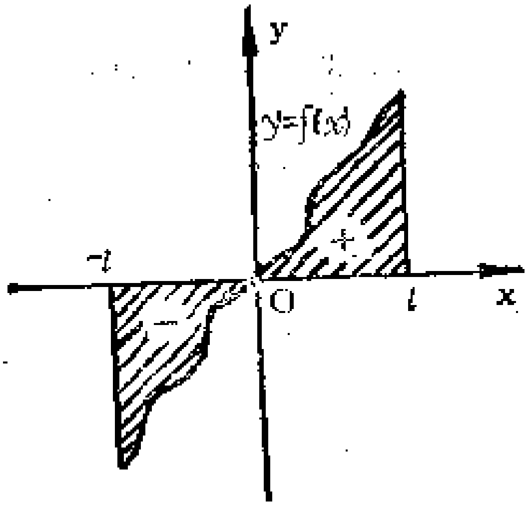

图 4.13

2259. 证明：偶函数的原函数中之一个为奇函数，而奇函数的一切原函数皆为偶函数。

证 设 $f(x)$在$[-l, l]$上定义*)，且$F(x)$是$f(x)$的一个原函数。当 $f(-x)=f(x)$时，由于

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x) \text{ 及 } f(-x)=-\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有 $\frac{d}{dx}[F(x)+F(-x)]=0$。从而可得

$$F(x)+F(-x)=C_1,\ \text{且} C_1=2F(0).$$

于是，$f(x)$有一个原函数$F(x)-F(0)$是奇函数。

当 $f(-x)=-f(x)$时，类似地可得

$$F(x)-F(-x)=C_2,\ \text{且} C_2=0.$$

于是，$F(-x)=F(x)$，即 $f(x)$的任一原函数$F(x)+C$（C为任意常数）也为偶函数。

*）如果$f(x)$在$[-l, l]$上可积，则由

$$F_c(x)=\int_0^x f(t)dt+C \text{（}C\text{是任意常数）}$$

也可获证，其中$F_k(x)$为$f(x)$的全部原函数。

2260．引入新变数

$$t=x+\frac{1}{x}.$$

来计算积分$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$。

解 设$t=x+\frac{1}{x}$，则

$$t^2-4=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2,\quad x=\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4}).$$

于是，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}dx$$

$$=\int_{2}^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})e^t d\left[\frac{1}{2}\left(t+\sqrt{t^2-4}\right)\right]$$

$$+\int_{\frac{5}{2}}^{2}(1-\sqrt{t^2-4})e^t d\frac{1}{2}(t-\sqrt{t^2-4})$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1+\sqrt{t^2-4})\,e^t\left(1+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_2^{\frac{5}{2}}(1-\sqrt{t^2-4})\,e^t\left(1-\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right)dt$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}e^t\left[\sqrt{t^2-4}+\frac{t}{\sqrt{t^2-4}}\right]dt$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}}[\sqrt{t^2-4}\,d(e^t)+e^t d\sqrt{t^2-4}]$$

$$=(\sqrt{t^2-4})e^t\Big|_2^{\frac{5}{2}}=\frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}.$$

2261. 于积分

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx.$$

中实行变数代换 $\sin x=t$。

解 $$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\cos x dx$$

$$+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\cos x dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}f(x)\cos x dx.$$

在右端的第一个积分中，设 $\sin x=t$；第二、第三个积分中，设 $\sin(\pi-x)=t$；第四个积分中，设 $\sin(2\pi-x)=-t$，代入得

$$\int_0^{2\pi}f(x)\cos x dx$$

$$=\int_0^1 [f(\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt$$

$$+\int_{-1}^0 [f(2\pi+\arcsin t)-f(\pi-\arcsin t)]dt.$$

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx,$$

式中n为自然数.

证 $\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'=\frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设$x=e^{-t}$,

则 $dx=-e^{-t}dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x}=\frac{\sin t}{e^{-t}}=e^t\sin t$.

代入得

$$\int_{e^{-2\pi n}}^1 \left|\left[\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right]'\right|dx=\int_0^{2\pi n}|\sin t|dt$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\sin t|dt=\sum_{k=1}^{2n}\int_0^{\pi}\sin t dt$$

$=2\cdot 2n=4n$.

2263. 求:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

解 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ *)

$$=\frac{\pi}{2}\left[-\operatorname{arc\,tg}(\cos x)\right]\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}.$$

*) 利用2257题结果。

2264. 设

$$f(x)=\frac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)},$$

求 $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$.

解 $\int_{-1}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$

$$=\int_{-1}^{0}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx+\int_{0}^{2}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$+\int_{2}^{3}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx$$

$$=\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{-1}^{0}+\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{0}^{2}+\operatorname{arc\,tg}f(x)\Big|_{2}^{3}$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}-0\right)^{*)}+\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{4^2\cdot 2}{3^3\cdot 1}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\frac{32}{27}-2\pi.$$

*) 参看2217题后的注意。

2265. 证明：若$f(x)$为定义在$-\infty<x<+\infty$而周期为 T 的连续的周期函数，则

$$\int_{a}^{a+T}f(x)\,dx=\int_{0}^{T}f(x)dx.$$

式中a为任意的数。

证 $\int_a^{a+T} f(x)dx$

$$=\int_a^0 f(x)dx+\int_0^T f(x)\,dx+\int_T^{a+T} f(x)\,dx.$$

对上述等式右端的第三个积分，设$x-T=t$，则

$$\int_T^{a+T} f(x)dx=\int_0^a f(t+T)\,dt=\int_0^a f(t)dt.$$

于是，

$$\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)\,dx.$$

2266．证明：当n为奇数时，函数

$$F(x)=\int_0^x \sin^n x dx \text{及} G(x)=\int_0^x \cos^n x dx$$

为以2π为周期的周期函数；而当n为偶数时，则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和。

证 当n为奇数时，$\sin^n x$是奇函数，而且是以2π为周期的函数．于是，

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi} \sin^n xdx$$

$$=\int_0^{2\pi} \sin^n xdx+\int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n xdx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x)\,dx+\int_0^x \sin^n xdx$$

$$=0+\int_0^x \sin^n xdx=F(x)$$

及

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n xdx$$

$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n xdx+\int_{\pi}^{2\pi}\cos^n xdx$$

$$=G(x)+\int_0^{\pi}\cos^n xdx+\int_0^{\pi}\cos^n(x+\pi)dx$$

$$=G(x),$$

从而得知：$F(x)$和$G(x)$都是以2π为周期的周期函数。

当 n 为偶数时，显然有

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^n xdx,$$

$$G(x+2\pi)=G(x)+\int_0^{2\pi}\cos^n xdx.$$

但因

$$\int_0^{2\pi}\sin^n xdx=\int_0^{2\pi}\cos^n xdx=a>0,$$

所以，$F(x)$、$G(x)$都不是2π为周期的周期函数。

设

$$F_1(x)=F(x)-\frac{a}{2\pi}x,$$

则

$$F_1(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{a}{2\pi}(x+2\pi)$$

$$=F(x)+a-\frac{a}{2\pi}x-a$$

$$=F(x)-\frac{a}{2\pi}x=F_1(x).$$

即$F_1(x)$是以2π为周期的函数，而

$$F(x)=F_1(x)+\frac{a}{2\pi}x.$$

所以，$F(x)$为周期函数与线性函数之和。

同理，可以证明$G(x)$也是周期函数与线性函数之和。

2267．证明：函数

$$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

（式中$f(x)$为具周期T的连续的周期函数）在一般的情形下是线性函数与周期函数之和。

证 因为$F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$，所以

$$F(x+T)-F(x)=\int_{x}^{x+T}f(x)dx.$$

又因$f(x)$是一周期为T的连续函数，所以

$$\int_{x}^{x+T}f(x)dx=\int_{x_0}^{x_0+T}f(x)dx=K.$$

于是，$F(x+T)-F(x)=K$。

如果$K=0$，则$F(x)$为一周期函数。

如果$K\neq 0$，可考虑函数 $\varphi(x)=F(x)-\frac{K}{T}x$，

则因

$$\varphi(x+T)=F(x+T)-\frac{K}{T}(x+T)$$

$$=F(x+T)-\frac{K}{T}x-K$$

$$=F(x)-\frac{K}{T}x=\varphi(x),$$

所以，$\varphi(x)$也为一周期函数，从而

$$F(x)=\varphi(x)+\frac{K}{T}x,$$

即$F(x)$是线性函数与周期等于T的周期函数之和。

计算下列积分：

2268. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$。

解 $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$

$$=-\frac{1}{26}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1=315\frac{1}{26}.$$

2269. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$.

解 $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

2270⁺. $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

解 $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$

$=x^3\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e x^2\ln x\cdot(1+\ln x)dx$

$=e^3 - 2\int_1^e x^2\ln x dx - 2\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

移项合并得

$\int_1^e (x\ln x)^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln x dx$

$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2}{9}x^3\ln x - \frac{2}{27}x^3\right)\Big|_1^e$

$= \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}$.

2271. $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$.

解 设$\sqrt[3]{1-x}=t$，则

$\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\,dx$

$= -3\int_0^{-2}(t^3-t^6)dt = -66\frac{6}{7}$.

2272⁺. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{-1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t\Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1}=-\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx.$

解 设$1+3x^8=t$，则$24x^7dx=dt$，$x^8=\frac{1}{3}(t-1)$。

于是，

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$$

$$=\frac{1}{72}\int_1^4(t-1)t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{29}{270}.$$

2274. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx.$

解 $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\,dx$

$$=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}\Big|_0^3-\int_0^3\frac{\sqrt{x}\,dx}{2(1+x)}$$

$$=\pi-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{1+t^2}\overset{*)}{=}\pi-(t-\operatorname{arc\,tg}t)\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

*) 设$\sqrt{x}=t$。

2275. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$

$=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$

$=\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{2-\cos x}$

$-\int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$

$=4\int_0^{\pi}\frac{dx}{4-\cos^2 x}-6\int_0^{\pi}\frac{dx}{9-\cos^2 x}$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{4\sin^2 x+3\cos^2 x}$

$-12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{9\sin^2 x+8\cos^2 x}$

$=8\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$-12\frac{1}{3\cdot\sqrt{8}}\operatorname{arc\,tg}\frac{3\operatorname{tg}x}{\sqrt{8}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2276. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解 $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)^{*)}\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{2}$.

*) 利用2035题的结果。

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$。

解 $\sin x\sin 2x\sin 3x$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 4x)\cdot\sin 2x$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}(\sin 6x-\sin 2x)。$$

于是，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin 2x\sin 3x dx$$

$$=\left(-\frac{1}{16}\cos 4x+\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{6}。$$

2278. $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$。

解 $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2 dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2(1-\cos 2x)dx$$

$$=\frac{1}{6}x^3\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x^2}{4}\sin 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x\sin 2x dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{x}{4}\cos 2x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{\pi}{4}.$$

2279. $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$.

解 $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{e^x(1+\cos 2x)}{2}dx$

$$=\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{10}\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)^{*)}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{3}{5}(e^{\pi}-1).$$

*) 利用1828题的结果。

2280. $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 x\,dx$.

解 $\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^4 x\,dx=\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 x\cdot(\operatorname{ch}^2 x-1)dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 2x\,dx-\int_0^{\ln 2}\operatorname{sh}^2 x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\operatorname{sh}4x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$-\left(-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x\right)^{*)}\Big|_0^{\ln 2}$$

$$=\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}.$$

*) 利用1761题的结果。

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分。

2281. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

解 $I_n=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x d(\cos x)$

$$=-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx,$$

移项合并得

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{若} n=2k;\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若} n=2k+1.\end{cases}$$

2282. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx$.

解 设 $\frac{\pi}{2}-x=t$，则 $dx=-dt$，且

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t.$$

代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt.$$

因此，与2281题的结果相同。

2283. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n}x\,dx.$

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\cdot(\sec^2x-1)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\,d(\operatorname{tg}x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-2}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1},$$

即

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-I_{n-1}.$$

由于$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\frac{\pi}{4}$，于是推得

$$I_n=\frac{1}{2n-1}-\left(\frac{1}{2n-3}-I_{n-2}\right)=\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-5}-\cdots+(-1)^nI_0$$

$$=(-1)^n\left\{\frac{\pi}{4}-\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right.\right.$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\Big)\Big]。$$

2284. $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$。

解 设$x=\sin t$，代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$=2^{2n}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}。$$

2285. $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

解 设$x=\sin t$，代入得

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt。$$

因此，与2281题的结果相同。

2286. $I_n=\int_0^1 x^m(\ln x)^n dx$。

解 $I_n=\frac{1}{m+1}x^{m+1}\ln^n x\Big|_0^1$

$$-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}dx,$$

于是，

$$I_n=-\frac{n}{m+1}I_{n-1}$$

$$=\Big(-\frac{n}{m+1}\Big)\Big(-\frac{n-1}{m+1}\Big)\cdots\Big(-\frac{1}{m+1}\Big)I_0$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

2287. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$.

解 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n+1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left[\sec^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^{2n-1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)d\left[\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]-I_{n-1}$$

$$=-\frac{1}{2n}-I_{n-1},$$

即

$$I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}.$$

递推之，得

$$I_n=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^n\cdot\frac{1}{2}+(-1)^nI_0.$$

但

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=-\ln\left|\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=-\ln\sqrt{2},$$

于是，

$$I_n=(-1)^n\left\{-\ln\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right]\right\}.$$

设 $f(x)=f_1(x)+if_2(x)$ 是实变数 x 的复函数，其中 $f_1(x)=\text{Re}f(x)$，$f_2(x)=\text{Im}f(x)$ 及 $i=\sqrt{-1}$，则按定义有：

$$\int f(x)\,dx=\int f_1(x)\,dx+i\int f_2(x)dx.$$

显而易见

$$\text{Re}\int f(x)\,dx=\int \text{Re}f(x)dx.$$

及 $$\text{Im}\int f(x)\,dx=\int \text{Im}f(x)dx.$$

2288. 利用尤拉氏公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

证明：

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx=\begin{cases}0, & 若 m\neq n,\\ 2\pi, & 若 m=n.\end{cases}$$

（n及m为整数）。

证 当$m=n$时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx=\int_0^{2\pi}dx=2\pi.$$

当$m\neq n$时，

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos nx+i\sin nx)(\cos mx-i\sin mx)dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos(m-n)xdx-i\int_0^{2\pi}\sin(m-n)xdx=0.$$

2289. 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx=\frac{e^{b(\alpha+i\beta)}-e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

（α 及β为常数）。

证 $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x}dx$

$$=\int_a^b e^{\alpha x}\cos\beta xdx+i\int_a^b e^{\alpha x}\sin\beta xdx$$

$$=\frac{e^{\alpha x}[\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x+i(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x)]}{\alpha^2+\beta^2}\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{e^{\alpha x}(\alpha-i\beta)(\cos\beta x+i\sin\beta x)}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}\Bigg|_a^b$$

$$=\frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta}\Bigg|_a^b=\frac{e^{(\alpha+i\beta)b}-e^{(\alpha+i\beta)a}}{\alpha+i\beta}.$$

利用尤拉氏公式：

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),$$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}),$$

计算下列积分（m及n为正整数）：

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$.

解：方法一：记

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx,$$

易见$I_0=\frac{1}{4}I$，其中

$$I=\int_0^{2\pi}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx,$$

利用尤拉公式，有

$$\sin^{2m}x\cos^{2n}x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2m}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k c_{2m}^k e^{2(m-k)ix}\sum_{l=0}^{2n}c_{2n}^l e^{2(n-l)ix}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix}$$

$$=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l(\cos 2(m+n-k-l)x+i\sin 2(m+n-k-l)x),$$

今不妨设$m\leqslant n$*，作积分计算，则有

$$I=\frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}}\sum_{k=0}^{2m}\sum_{l=0}^{2n}(-1)^k c_{2m}^k c_{2n}^l\left(\int_0^{2\pi}\cos(m+n\right.$$

---

* 若$m>n$作代换$x=\frac{\pi}{2}-u$即得。

$$-k-l)\,2x\,dx + i\int_0^{2\pi}\sin(m+n-k-l)2x\,dx\Big)$$

$$=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum\sum_{\substack{k+l=m+n\\0\leq k\leq 2m\\0\leq l\leq 2n}}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l$$

$$=\frac{(-1)^m\pi}{2^{2m+2n-1}}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

经计算，可以验证有*

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}$$

$$=\frac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}.$$

于是得

$$I_0=\frac{1}{4}I=\frac{\pi(2m)!\,(2n)!}{2^{2m+2n+1}\,m!\,n!\,(m+n)!}.$$

方法二：

令$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx$.显然

$$I_{m,0}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

---

* 用$C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}=C_{2m}^m C_{2n}^n\left(C_{m+n}^m\right)^{-2}C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}$，以及由恒等式$(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n}=(1-x^2)^{m+n}$展开，取$x^{2m}$的系数的关系式$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{m+n}^k C_{m+n}^{2m-k}=(-1)^m C_{m+n}^m$可以验证。

$$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n-1}x\,d\sin x$$

$$=\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-1}x\,d\sin^{2m+1}x$$

$$=\frac{1}{2m+1}\cos^{2n-1}x\sin^{2m+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\frac{1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,d\cos^{2n-1}x$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2}x\cos^{2n-2}x\,dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x(1-\cos^2x)\cos^{2(n-1)}x\,dx$$

$$=\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n-1}-\frac{2n-1}{2m+1}I_{m,n},$$

整理后得

$$I_{m,n}=\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}.$$

由此不难得

$$I_{m,n}=\frac{(2n-1)!!}{2^n(m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)}I_{m,0}$$

$$=\frac{(2n-1)!!\,m!}{2^n(m+n)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi(2n-1)!!\,(2m-1)!!}{2^{m+n+1}(m+n)!}$$

$$=\frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}\,m!n!(m+n)!}.$$

2291. $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$.

解 设 $u=\frac{\sin nx}{\sin x}$，利用尤拉公式得

$$u=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{e^{ix}-e^{-ix}}.$$

当$n=2k$时，

$$u=(e^{ikx}+e^{-ikx})\cdot(e^{i(k-1)x}+e^{i(k-3)x}+\cdots$$
$$+e^{-i(k-3)x}+e^{-i(k-1)x})$$
$$=e^{(2k-1)ix}+e^{(2k-3)ix}+\cdots+e^{ix}+e^{-ix}$$
$$+\cdots+e^{-(2k-1)ix}$$
$$=2[\cos(2k-1)x+\cos(2k-3)x+\cdots+\cos x],$$

于是，

$$\int_0^{\pi}udx=2\left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\frac{\sin(2k-3)x}{2k-3}\right.$$
$$\left.+\cdots+\sin x\right]\Big|_0^{\pi}=0.$$

当$n=2k+1$时，同上得

$$u=2[\cos 2kx+\cos 2(k-1)x+\cdots+\cos 2x]+1.$$

于是，

$$\int_0^{\pi}udx=\pi.$$

最后得到

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\begin{cases}0\ ， & n\text{为偶数；}\\ \pi， & n\text{为奇数。}\end{cases}$$

2292. $\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$。

解 $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}=\frac{e^{i(2n+1)x}+e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix}+e^{-ix}}$

$=e^{2nix}-e^{2(n-1)ix}+\cdots+(-1)^n+\cdots+e^{-2nix}$

$=2[\cos 2nx-\cos 2(n-1)x+\cdots$

$+(-1)^{n-1}\cos 2x]+(-1)^n$。

于是，

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx=(-1)^n\pi。$$

2293. $\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx dx$

解 $\cos^n x\cos nx=\frac{1}{2^{n+1}}(e^{ix}+e^{-ix})^n(e^{inx}+e^{-inx})$

$=\frac{1}{2^n}\left[\cos 2nx+c_n^1\cos 2(n-1)x+\cdots\right.$

$\left.+c_n^{n-1}\cos 2x+1\right]$。

于是，

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\cos nx dx=\frac{\pi}{2^n}。$$

2294. $\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx dx$。

解 方法一：

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx$$

$$=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\int_0^\pi\left[\sum_{k=0}^n(-1)^k c_n^k e^{i(n-2k)x}(e^{inx}-e^{-inx})\right]dx$$

$$=\frac{1}{(2i)^{n+1}}\left[\sum_{k=0}^n(-1)^k c_n^k\int_0^\pi e^{i(2n-2k)x}dx-\sum_{k=0}^n(-1)^k c_n^k\int_0^\pi e^{-i2kx}dx\right]$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}i^{n+1}}\left[(-1)^n c_n^n\cdot\pi-(-1)^0 c_n^0\pi\right]$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{为偶数；}\\ \frac{\pi}{2^n}\cdot(-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{为奇数。}\end{cases}$$

由于

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{为偶数，}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, & n\text{为奇数，}\end{cases}$$

于是，

$$\int_0^\pi \sin^n x\sin nx dx=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

方法二：

设 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则

$$\int_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin\left(\frac{n\pi}{2}-nt\right)dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt\, dt$$

$$-\cos\frac{n\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt\, dt$$

$$=\sin\frac{n\pi}{2}\int_0^\pi \cos^n x \cos nx\, dx$$

$$=\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

求下列积分（n为自然数）：

2295. $\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx$.

解 $\int_0^\pi \sin^{n-1} x\cos(n+1)x\,dx$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1} x(\cos nx \cos x-\sin nx \sin x)dx$$

$$=\int_0^\pi \sin^{n-1} x \cos nx\, d(\sin x)-\int_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx$$

$$=\frac{\sin^n x\cos nx}{n}\Big|_0^\pi-\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin^n x\, d(\cos nx)$$

$$-\int_0^\pi \sin^n x \sin nx\, dx$$

$$=0.$$

2296. $\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin(n+1)x dx$.

解 考虑积分

$$I=\int_0^\pi \cos^{n+1} x\sin(n+1)xdx,$$

并对它作两次分部积分，可得

$$I=I-\frac{n}{n+1}\int_0^\pi \cos^{n-1} x\sin(n+1)xdx.$$

于是，

$$\int_0^\pi \cos^{n-1} x\sin(n+1)xdx=0.$$

本题也可不用分部积分法．事实上，$\cos^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x$是以$\pi$为周期的函数，又是奇函数，于是

$$\int_0^\pi \cos^{n-1} x\sin(n+1)xdx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\sin(n+1)xdx=0.$$

2297. $\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} xdx$.

解 方法一：

$$\cos^{2n} x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\cos 2(n-k)x\right].$$

于是

$$I=\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n} xdx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{c_{2n}^n\cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax}\ dx+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos 2(n-k)\ xdx\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n e^{-ax}\Big|_0^{2\pi}+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(2n-2k)\cdot\sin 2(n-k)x-a\cos 2(n-k)x}{a^2+(2n-2k)^2}e^{-ax}\Big|_0^{2\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{2n}}\left\{-\frac{1}{a}c_{2n}^n\cdot(e^{-2\pi a}-1)-a(e^{-2\pi a}-1)\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2c_{2n}^k}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left\{c_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\},$$

即

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n}xdx$$

$$=\frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\cdot\left\{c_{2n}^n+2\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n}^k\right.$$

$$\left.\cdot\frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right\}.$$

方法二：

由于

$$\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x}dx = \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{e^{2\pi a}-1}{a+ik} = \frac{(e^{2\pi a}-1)(a-ik)}{a^2+k^2},$$

取实部，得

$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x}dx = \frac{a(e^{2\pi a}-1)}{a^2+k^2}$$

于是，

$$\int_0^{2\pi} e^{-ax}\cos^{2n} x dx$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^{2n} dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\int_0^{2\pi} e^{-ax}\left(\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k e^{i(2n-2k)x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x}dx$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a}-1}{-a+i(2n-2k)}$$

$$= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{a(1-e^{-2\pi a})}{a^2+(2n-2k)^2}$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi a}}{2^{2n}\cdot a}\left[c_{2n}^n + 2\sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \frac{a^2}{a^2+(2n-2k)^2}\right].$$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx\,dx$.

解 利用分部积分得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x \cdot \cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2n}\sin 2nx \cdot \ln\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cdot \sin x}{\cos x}\,dx$$

$$= 0^{*)} + \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}\,dx$$

$$- \frac{1}{4n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\,dx.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式：

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$= 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-2}\cos 2x] + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$$

$$= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\cos 2x] + (-1)^n.$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx\,dx \quad (k\text{ 为任意的正整数})$$

的值恒等于零，所以积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x}dx \quad \text{及} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$$

分别等于$(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}$及$(-1)^n\frac{\pi}{2}$.

这样，我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\cdot\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{1}{4n}\left[(-1)^{n-1}\frac{\pi}{2}-(-1)^n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{\pi}{4n}(-1)^{n-1}.$$

*) 在$x=0$处，$\sin 2nx\cdot\ln\cos x=0$；而在$x=\frac{\pi}{2}$处，为"$0\cdot\infty$"型，采用洛比塔法则定值：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\sin 2nx\cdot\ln\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\sin x\cdot\sin^2 2nx}{\cos x\cdot\cos 2nx}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x\cdot\sin^2 2nx+4n\sin x\sin 2nx\cos 2nx}{-\sin x\cos 2nx-2n\cos x\sin 2nx}$$

$$=0.$$

2299. 利用多次的部分积分法，计算尤拉氏积分：

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

式中m及n为正整数。

解 $B(m,n)=\frac{1}{m}x^m(1-x)^{n-1}\Big|_0^1$

$$+\frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,dx$$

$$=\frac{n-1}{m}B(m+1,\ n-1).$$

继续利用部分积分法，可得

$$B(m,n)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)}\int_0^1 x^{m+n-2}\,dx$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!}$$

$$\cdot\frac{1}{m+n-1}x^{m+n-1}\Big|_0^1$$

$$=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

2300. 勒让德多项式$P_n(x)$被下面公式来定义：

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

证明

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)\,dx=\begin{cases}0, & 若\ m\neq n,\\ \frac{2}{2n+1}, & 若\ m=n.\end{cases}$$

证：当$m\neq n$时，不失一般性，设$n<m$。由于$P_n(x)$为一m次的多项式，我们记

$$P_m(x)=R^{(m)}(x),$$

其中$R(x)=\frac{1}{2^m m!}(x^2-1)^m$。

利用多次部分积分法得

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx$$

$$=\Big[P_n(x)R^{(m-1)}(x)-P_n'(x)R^{(m-2)}(x)+\cdots$$

$$+(-1)^{m-1}P_n^{(m-1)}(x)R(x)\Big]\Big|_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^m\int_{-1}^{1}R(x)P_n^{(m)}(x)dx=0.$$

当$m=n$时，

$$\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\right]^2dx;$$

设 $u=\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$，$v=(x^2-1)^n$，则

$$\int_{-1}^{1}P_n^2(x)dx$$

$$=\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\Big[uv^{(n-1)}-u'v^{(n-2)}+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}v\Big]\Big|_{-1}^{1}+(-1)^n$$

$$\cdot\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} vu^{(n)}dx$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}[(x^2-1)^n]dx$$

$$=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx$$

$$\overset{*)}{=}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\,dt$$

$$\overset{**)}{=}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=\frac{2}{2n+1}.$$

*) 设$x=\sin t$。

**) 利用2282题的结果。

2301. 设函数$f(x)$在$[a, b]$上可积分，函数$F(x)$在$[a, b]$内除了有限个点$c_i(i=1, \cdots, p)$及点a与b外皆有$F'(x)=f(x)$，而在这除去的有限个点上$F(x)$有第一类的间断点（广义原函数）。证明

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}\left[F(c_i+0)-F(c_i-0)\right].$$

证 为确定起见，设$a<c_1<c_2<\cdots<c_p<b$，并记$a=c_0$，$b=c_{p+1}$。由于$f(x)$在$[a, b]$上可积，故

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0+}\sum_{i=0}^{p}\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta}f(x)dx.$$

显然，在$[c_i+\eta, c_{i+1}-\eta]$上$F'(x)=f(x)$，从而可

应用牛顿—莱布尼兹公式，得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx=F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\eta\to 0+}\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-\eta)-F(c_i+\eta)]$$

$$=\sum_{i=0}^{p}[F(c_{i+1}-0)-F(c_i+0)]$$

$$=F(b-0)-F(a+0)-\sum_{i=1}^{p}[F(c_i+0)$$

$$-F(c_i-0)].$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积分，而

$$F(x)=C+\int_a^x f(\xi)d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分。证明函数 $F(x)$ 连续且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处有等式

$$F'(x)=f(x)$$

成立，问在函数 $f(x)$ 不连续点处函数 $F(x)$ 的导函数为何？

解 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，故必有界：$|f(x)|\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$。因此，对任何 $x\in[a, b]$，有

$$|F(x+\Delta x)-F(x)|$$

$$=\left|\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi\right|\leqslant M\cdot|\Delta x|\to 0\ (\text{当}\Delta x\to 0\text{时})。$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续。

现设$f(\xi)$在点$\xi=x$处连续，于是，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$|\xi-x|<\delta$时，恒有$|f(\xi)-f(x)|<\varepsilon$。

于是，当$0<|\Delta x|<\delta$时，恒有

$$\left|\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}-f(x)\right|$$

$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}[f(\xi)-f(x)]d\xi\right|$$

$$<\frac{1}{|\Delta x|}\varepsilon\cdot|\Delta x|=\varepsilon,$$

故$F'(x)$存在，且

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=f(x).$$

而在不连续点处$F'(x)$可能存在也可能不存在。例如，设

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=\dfrac{1}{n},\\ 0, & \text{当 } x\neq\dfrac{1}{n},\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

则$f(x)$在$[0,1]$的可积性可仿2194题证明，而且显然有

$$\int_0^x f(t)dt=0\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

然而在点$x=\frac{1}{n}$处，$F(x)=C$的导函数$F'(x)$

$=0$ 是存在的。

但函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$，它在 $[-1,1]$ 上是可积的，且

$$\int_0^x f(x)dx=|x|,$$

然而在点 $x=0$ 处，$F(x)=|x|+C$ 的导函数 $F'(x)$ 不存在。

求下列有界非连续函数的不定积分：

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx$。

解 $\int \operatorname{sgn} x dx=\int_0^x \operatorname{sgn} x dx+C=|x|+C$。

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx$。

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积，故其原函数 $F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数。对任何 x，必存在唯一的整数 k 使 $k\pi\leqslant x<(k+1)\pi$。于是

$$F(x)=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$$

$$=\int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t)\,dt+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t)dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+\int_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}dt$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos t)\Big|_{k\pi+\frac{\pi}{2}}^{x}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\arccos(\cos x)-\frac{\pi}{2}$$

$$=\arccos(\cos x).$$

故

$$\int \operatorname{sgn}(\sin x)dx=\arccos(\cos x)+C$$

$$(-\infty<x<+\infty).$$

2305. $\int [x]dx\ (x\geqslant 0)$.

解 $$\int [x]\,dx=C+\int_0^x [x]dx$$

$$=C+\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} kdx+\int_{[x]}^x [x]dx$$

$$=C+\sum_{k=0}^{[x]-1} k+[x](x-[x])$$

$$=x\cdot[x]-\frac{[x]^2+[x]}{2}+C.$$

2306. $\int x[x]dx\ \ (x\geqslant 0)$.

解 $$\int x[x]dx=C+\int_0^x x[x]dx$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\int_k^{k+1} ktdt+\int_{[x]}^x [x]tdt+C$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\left(\frac{kt^2}{2}\Big|_k^{k+1}\right)+\frac{[x]t^2}{2}\Big|_{[x]}^{x}+C$$

$$=\sum_{k=0}^{[x]-1}\left(k^2+\frac{k}{2}\right)+\frac{[x](x^2-[x]^2)}{2}+C$$

$$=\frac{([x]-1)[x](2[x]-1)}{6}+\frac{[x]([x]-1)}{4}$$

$$+\frac{x^2[x]-[x]^3}{2}+C$$

$$=\frac{x^2[x]}{2}$$

$$-\frac{6[x]^3-3[x]([x]-1)-2[x]([x]-1)(2[x]-1)}{12}$$

$$+C$$

$$=\frac{x^2[x]}{2}-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}+C.$$

2307. $\int(-1)^{[x]}dx.$

解 $\int(-1)^{[x]}dx=\int_0^x \operatorname{sgn}(\sin\pi x)dx+C$

$$=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)\Big|_0^{x}{}^{*)}+C$$

$$=\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)+C.$$

*) 利用2304题的结果。

2308. $\int_0^x f(x)dx$，其中 $f(x)=\begin{cases}1, & 若|x|<l,\\ 0, & 若|x|>l.\end{cases}$

解 $\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^l f(x)dx+\int_l^x f(x)dx$

$=\int_0^l 1\cdot dx+\int_0^x 0\,dx=l\quad(x\geqslant l)$,

$\int_0^x f(x)\,dx=\int_0^x 1\cdot dx=x\quad(|x|<l)$,

$\int_0^x f(x)dx$

$=-\int_x^{-l} f(x)\,dx-\int_{-l}^0 f(x)dx=-l\quad(x\leqslant -l)$.

合并得

$$\int_0^x f(x)\,dx=\frac{1}{2}(|l+x|-|l-x|).$$

计算下列有界非连续函数的定积分:

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)dx$.

解 $\operatorname{sgn}(x-x^3)=\begin{cases}1, & 当x\in(0,1)时,\\ -1, & 当x\in(1,3)时.\end{cases}$

于是,

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3)\,dx=\int_0^1 dx-\int_1^3 dx=-1.$$

2310. $\int_0^2 [e^x]dx$.

解 $\int_0^2 [e^x]dx$

$$=\int_0^{\ln 2} 1dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\cdot dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\cdot dx$$

$$+\cdots+\int_{\ln 7}^{2} 7\cdot dx$$

$$=\ln 2+2(\ln 3-\ln 2)+3(\ln 4-\ln 3)+\cdots$$

$$+7(-\ln 7+2)$$

$$=14-(\ln 2+\ln 3+\ln 4+\cdots+\ln 7)$$

$$=14-\ln 7!.$$

2311. $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$.

解 $\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$

$$=\int_1^2 \sin\frac{\pi x}{6}dx+\int_2^3 2\sin\frac{\pi x}{6}dx+\cdots$$

$$+\int_5^6 5\sin\frac{\pi x}{6}dx$$

$$=\frac{30}{\pi}.$$

2312. $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx$.

解 $\int_0^{\pi} x\,\mathrm{sgn}(\cos x)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-x)dx=-\frac{\pi^2}{4}.$$

2313. $\int_1^{n+1}\ln[x]dx$，其中 n 为自然数。

解 $\int_1^{n+1}\ln[x]dx$

$$=\int_2^3\ln 2dx+\int_3^4\ln 3\,dx+\cdots+\int_n^{n+1}\ln n\,dx$$

$=\ln n!$。

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$。

解 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)]dx$

$$=\int_{e^{-\pi}}^1(-1)dx+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}}dx$$

$$=-1+2e^{-\pi}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^{-(k-1)\pi}$$

$$=-1+\frac{2e^{-\pi}}{1+e^{-\pi}}=\frac{e^{-\pi}-1}{e^{-\pi}+1}=-\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

2315. 求$\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}dx$，其中$E$为闭区间〔0，$4\pi$〕中使被积分式有意义的一切值所成之集合。

解 $\int_E|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$

$$=\int_0^{\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$+\int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$+\int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi}(-\cos x)\sqrt{\sin x}\,dx$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{\sin x}\,dx=\frac{8}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}.$$

§3. 中值定理

1° 函数的平均值 数

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

称为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的平均值。

若函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，则可求得一点 $c\in(a,b)$ 适合

$$M[f]=f(c).$$

2° 第一中值定理 若：（1）函数$f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间$[a, b]$上有界并可积分；（2）当 $a<x<b$ 时，函数 $\varphi(x)$ 不变号，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int_a^b\varphi(x)dx,$$

式中 $m\leqslant\mu\leqslant M$ 及 $M=\sup\limits_{a<x<b}f(x)$，$m=\inf\limits_{a<x<b}f(x)$；（3）除此而外，若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $\mu=f(c)$，其中 $a\leqslant c\leqslant b$（编者注：可以证明，c 可取值使 $a<c<b$）。

3° 第二中值定理 若：（1）函数$f(x)$和 $\varphi(x)$ 于闭区间$[a,b]$上有界并可积分；（2）当 $a<x<b$ 时，函数 $\varphi(x)$是单调的，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$$

$$=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx+\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)dx,$$

式中$a\leqslant\xi\leqslant b$；（3）除此而外，若函数$\varphi(x)$单调下降（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} f(x)dx\ (a\leqslant\xi\leqslant b);$$

（3′）若函数$\varphi(x)$单调上升（广义的）且不为负，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(b-0)\int_{\xi}^b f(x)dx\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2316. 确定下列定积分的符号：

(a) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$；　　(б) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；

(в) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx$；　　(г) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2\ln x dx$.

解 (a) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x dx+\int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx$$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x dx-\int_0^{\pi}(t+\pi)\sin t dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\sin x dx<0.$$

(б) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx-\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+\pi}dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x(x+\pi)}dx$$

$$=\frac{\pi^2\sin c}{c(c+\pi)}>0,$$

其中 $0<c<\pi$。

(в) 由第一中值定理知

$$\int_{-2}^{2}x^3e^x dx$$

$$=\int_{-2}^{0}x^3e^x dx+\int_0^2 x^3e^x dx$$

$$=\int_2^0 t^3e^{-t}\,dt+\int_0^2 x^3e^x dx$$

$$=\int_0^2 x^3(e^x-e^{-x})dx=2c^3(e^c-e^{-c})>0,$$

其中 $0<c<2$。

(г) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^2\ln x dx$

$$=\frac{1}{2}c^2\ln c<0\quad(\text{其中}\frac{1}{2}<c<1)$$

2317. 于下列各题中确定那个积分较大：

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$?

(б) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

(в) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$?

解 (a) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$0 < \sin x < 1$ 从而

$$0 < \sin^{10} x < \sin^2 x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

(б) 当 $0 < x < 1$ 时，$x > x^2$，从而

$$e^{-x} < e^{-x^2},$$

于是

$$\int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

(в) $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$

$$= \int_0^{\pi} e^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x dx < \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

2318. 求下列已知函数在所给区间内的平均值：

(a) $f(x) = x^2$ 在[0, 1]上；

(б) $f(x) = \sqrt{x}$ 在[0, 100]上；

(в) $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ 在$[0, 2\pi]$上；

(г) $f(x)=\sin x\sin(x+\varphi)$ 在$[0, 2\pi]$上。

解 (а) $M[f]=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$；

(б) $M[f]=\frac{1}{100}\int_0^{100}\sqrt{x}\,dx=6\frac{2}{3}$；

(в) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(10+2\sin x+3\cos x)dx$

$=10$；

(г) $M[f]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\cdot\sin(x+\varphi)dx$

$=\frac{1}{2}\cos\varphi$.

2319. 求椭圆之焦径

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}\quad(0<\varepsilon<1)$$

之长的平均值。

解 设 $\varphi=\pi+t$，则

$$M(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos t}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{p}{2\pi}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ ^{*)}$$

$$=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b,$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用2213题的结果.

2320. 求初速度为v_0之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为$v=v_0+gt$，从 $t=0$ 到 $t=T$ 时间内的速度的平均值

$$M[v]=\frac{1}{T}\int_0^T(v_0+gt)dt=\frac{1}{2}gT+v_0$$

$$=\frac{1}{2}(v_0+v_T).$$

物理意义：平均速度等于初速与末速之和的一半.

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i=i_0\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right),$$

其中 i_0 表振幅，t 表时间，T 表周期，φ 表初相，求电流强度之平方的平均值.

解 $$M(i^2)=\frac{1}{T}\int_0^T i_0^2\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)dt$$

$$=\frac{i_0^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=\frac{i_0^2}{2}.$$

将上式开平方，即得电流的有效值$\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

2322. 命$\int_0^x f(t)dt=xf(\theta x)$，求$\theta$，设：

(a) $f(t)=t^n$ $(n>-1)$；　(б) $f(t)=\ln t$；

(в) $f(t)=e^t$，

$\lim\limits_{x\to 0}\theta$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$ 等于甚么？

解　(a) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}$，从而

$$\frac{x^{n+1}}{n+1}=\theta^n x^{n+1}.$$

于是

$$\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

(б) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \ln t dt=t(\ln t-1)\Big|_0^x$

$$=x(\ln x-1),$$

从而

$$x(\ln x-1)=x\ln\theta x,$$

于是

$$\theta=\frac{1}{e}.$$

(в) $\int_0^x f(t)dt=\int_0^x e^t dt=e^t\Big|_0^x=e^x-1$，从而

$$e^x-1=xe^{\theta x},$$

于是

$$\theta=\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$，故当$x\to 0$时，$\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$是$\frac{0}{0}$型未定形．因此

$$\lim_{x\to 0}\theta=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{e^x-1}\cdot\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1+xe^x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{-x}\cdot\frac{e^x-1}{x}+1}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\theta=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}}{1-\frac{1}{e^x}}=1,$$

于是，

$$\lim_{x\to 0}\theta=\frac{1}{2}\text{及}\lim_{x\to+\infty}\theta=1.$$

利用第一中值定理估计积分：

2323. $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+0.5\cos x}$.

解 由于

$$\frac{1}{1+0.5} \leqslant \frac{1}{1+0.5\cos x} \leqslant \frac{1}{1-0.5},$$

即

$$\frac{2}{3} \leqslant \frac{1}{1+0.5\cos x} \leqslant 2.$$

于是

$$\frac{4\pi}{3} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} \leqslant 4\pi,$$

即

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0.5\cos x} = \frac{8\pi}{3} \pm \frac{4\pi}{3}\theta \quad (|\theta| \leqslant 1).$$

2324. $\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$.

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leqslant x^9$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$，从而，

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 \, dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\leqslant \int_0^1 x^9 dx,$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leqslant \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \, dx \leqslant \frac{1}{10}.$$

2325. $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$.

C.

解 $I=\int_0^{50}\frac{e^{-x}}{x+100}dx+\int_{50}^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx$

$$=\frac{1}{100+\xi_1}\int_0^{50}e^{-x}dx+\frac{1}{100+\xi_2}\int_{50}^{100}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2},$$ 其中$0\leqslant\xi_1\leqslant 50$，

$50\leqslant\xi_2\leqslant 100$。

显然

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$\leqslant\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1}$$

$$=\frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1}<\frac{1}{100},$$

$$\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}+\frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}$$

$$>\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1}\geqslant\frac{1-e^{-50}}{150}>\frac{1}{200},$$

故$\frac{1}{200}<I<\frac{1}{100}$，即$I=0.01-0.005\theta$，$0<\theta<1$。

另外，按中值定理，可写

$$I=\int_0^{100}\frac{e^{-x}}{x+100}dx=\frac{1}{\xi+100}\int_0^{100}e^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{\xi+100}\left(1-\frac{1}{e^{100}}\right),$$

其中$0 \leqslant \xi \leqslant 100$，如果改写 I 为

$$I = 0.01 - 0.005\theta,$$

则有

$$\theta = f(\xi) = \frac{2}{100+\xi}\left(\xi + \frac{100}{e^{100}}\right).$$

易见导数

$$f'(\xi) = \frac{200(1-e^{-100})}{(100+\xi)^2} > 0,$$

$f(\xi)$单调上升，故在 $[0, 100]$ 上有 $f(0) \leqslant f(\xi) \leqslant f(100)$，也即有

$$\frac{2}{e^{100}} \leqslant \theta \leqslant 1 + \frac{1}{e^{100}}.$$

根据前面的估计 $0 < \theta < 1$，综合起来，便有

$$\frac{2}{e^{100}} \leqslant \theta < 1.$$

这个结果比原来的估计又好了一些. 如果更精确一些，采用些近似计算方法，还可进一步明确 θ 的数值范围. 此处从略.

2326. 证明等式

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = 0$； (б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

证 (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n}\cdot\frac{1}{n+1} = 0;$$

(6) 任意给定$\varepsilon>0$，且设$\varepsilon<\frac{\pi}{2}$，则

$$0\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x dx+\varepsilon$$

$$\leqslant\varepsilon+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

当$n\to\infty$时，上述不等式的第二项趋于零，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0.$$

2327. 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，而$\varphi(x)$在$[a, b]$上连续且在(a, b)上可微分，并且

$$\varphi'(x)\geqslant 0 \quad 当 \quad a<x<b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以证明第二中值定理。

证 设$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\int_a^b\varphi(x)dF(x)$$

$$=F(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b F(x)\varphi'(x)dx$$

$$=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)\int_a^b\varphi'(x)dx$$

$$=F(b)\varphi(b)-F(a)\varphi(a)-F(\xi)[\varphi(b)-\varphi(a)]^{*)}$$

$$=\varphi(b)[F(b)-F(\xi)]+\varphi(a)[F(\xi)-F(a)]$$

$$=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx+\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

*) 一般数学分析中已有第二中值定理的证明，本题限用部分积分法证明，应加$\varphi'(x)$在$[a, b]$上连续的条件。

利用第二中值定理，估计积分：

2328. $\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

解 设$f(x)=\sin x$，$\varphi(x)=\frac{1}{x}$，则$f(x)$及$\varphi(x)$在$[100\pi, 200\pi]$上满足第二中值定理的条件，又$\varphi(x)=\frac{1}{x}$单调下降且不为负，于是，

$$\int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx$$

$$= \frac{1-\cos\xi}{100\pi} = \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{50\pi} = \frac{\theta}{50\pi},$$

其中$100\pi \leqslant \xi \leqslant 200\pi$及$0 \leqslant \theta \leqslant 1$。

2329. $\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx \quad (\alpha \geqslant 0;\ 0<a<b)$.

解 设$f(x)=\sin x$，$\varphi(x)=\frac{e^{-\alpha x}}{x}$，同上题，有

$$\int_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin x dx = \frac{e^{-\alpha a}}{a}\int_a^{\xi} \sin x dx$$

$$= \frac{1}{ae^{\alpha a}}(\cos a - \cos\xi)$$

$$= -\frac{2}{a} e^{-\alpha a} \sin\frac{a+\xi}{2} \sin\frac{a-\xi}{2} = \frac{2}{a}\theta,$$

其中$a\leqslant\xi\leqslant b$及$|\theta|<1$。

2330. $\int_a^b \sin x^2 dx \quad (0<a<b)$。

解 设$x=\sqrt{t}$。则

$$\int_a^b \sin x^2\, dx=\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

其次，设$f(t)=\sin t$，$\varphi(t)=(\sqrt{t})^{-1}$，则$\varphi(t)$单调下降，且$\varphi(t)>0$，于是

$$\frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2a}\int_{a^2}^{\xi}\sin t dt$$

$$=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi)=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi+a^2}{2}\sin\frac{\xi-a^2}{2}$$

$$=\frac{1}{a}\theta,$$

其中$a^2\leqslant\xi\leqslant b^2$，$|\theta|\leqslant 1$。所以

$$\int_a^b \sin x^2 dx=\frac{\theta}{a} \quad (|\theta|\leqslant 1).$$

2331. 设函数$\varphi(x)$及$\psi(x)$和它们的平方在区间$[a,b]$上可积分。证明哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2\leqslant\int_a^b\varphi^2(x)\,dx\int_a^b\psi^2(x)dx.$$

证 证法一：我们有

$$\left(\int_a^b\varphi^2(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_a^b\psi^2(x)dx\right)$$

$$-\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_a^b \varphi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \psi^2(y)dy\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_a^b \psi^2(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi^2(y)dy\right)$$

$$-\left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right)\cdot\left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y)dy\right)$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left\{\int_a^b [\varphi(x)\psi(y)-\psi(x)\varphi(y)]^2dx\right\}dy$$

$\geqslant 0$，

故

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)dx\cdot\int_a^b \psi^2(x)dx.$$

证法二：考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x)-\lambda\psi(x)]^2dx,$$

其中 λ 为任意实数．从而

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx-2\lambda\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx$$

$$+\lambda^2\int_a^b \psi^2(x)dx\geqslant 0.$$

这是关于变数 λ 的不等式，左端是二次三项式，于是其判别式

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx\right\}^2-\int_a^b \varphi^2(x)dx$$

$$\int_a^b \psi^2(x)dx \leqslant 0,$$

即

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx\right\}^2$$

$$\leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)dx.$$

2332. 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续可微分且 $f(a)=0$，证明不等式

$$M^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx,$$

其中 $M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$。

证 设x为$[a,b]$上任一点，则利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{\int_a^x f'(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^x 1\cdot dx\cdot\int_a^x f'^2(x)dx,$$

即

$$f^2(x)=[f(x)-f(a)]^2 \leqslant (x-a)\int_a^x f'^2(x)dx$$

$$\leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

由此可知

$$M^2=\sup_{x\in[a,b]} f^2(x) \leqslant (b-a)\int_a^b f'^2(x)dx.$$

2333. 证明等式：

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

证　证法一：应用第一中值定理，知

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p=0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n+p$ 之间的某值。

证法二：应用第二中值定理，得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|=\frac{1}{n}\left|\int_n^{\xi'_n}\sin x dx\right|$$

$$=\frac{1}{n}\left|\cos n-\cos\xi'_n\right|\leqslant\frac{2}{n}\to 0\quad(n\to\infty),$$

其中ξ_n'是界于n与$n+p$之间的某值。于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0.$$

§4. 广义积分

1° **函数的广义可积分性**　若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区间$[a,b]$上依寻常的意义是可积分的，则可定义

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

若函数$f(x)$ 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a,b-\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ 内依寻常的意义是可积分的，则取

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx. \tag{2}$$

若极限（1）或（2）存在，则对应的积分称为收敛的，在相反的情形则称为发散的。

2° 哥西准则　积分（1）收敛的充要条件为对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在有数 $b = b(\varepsilon)$，当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时，下面的不等式成立

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

同样地对形状为（2）的积分可述出哥西准则。

3° 绝对收敛的判别法　若 $|f(x)|$ 是广义可积分的，则函数 $f(x)$ 的对应的积分（1）或（2）称为绝对收敛的，而且显然也是收敛的积分。

比较判别法Ⅰ. 设当 $x \geqslant a$ 时 $|f(x)| \leqslant F(x)$。

若 $\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛，则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛。

比较判别法Ⅱ. 若 $\psi(x) > 0$ 及当 $x \to +\infty$ 时，

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x)),$$

则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \psi(x)dx$ 同时收敛或同时发散。

就特别情形来说，若当 $x \to +\infty$ 时，$\varphi(x) \sim \psi(x)$，则上面的结果也成立。

比较判别法Ⅲ. (a) 设当 $x \to +\infty$ 时，

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下，当 $p > 1$ 时，积分（1）收敛；当 $p \leqslant 1$ 时，积分（1）发散。

(6) 设当$x \to b-0$时，

$$f(x)=O^*\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下，当$p<1$时，积分（2）收敛；当$p\geqslant 1$时，积分（2）发散。

4° 收敛性的较精密的判别法 若（1）当$x\to+\infty$时，函数$\varphi(x)$单调地趋近于零；（2）函数$f(x)$有有界的原函数

$$F(x)=\int_a^x f(\xi)d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

收敛，但一般地说，并非绝对收敛。

特殊情形，若$p>0$，则积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx \text{ 及 } \int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx \quad (a>0)$$

收敛。

5° 在哥西意义上的主值 若函数$f(x)$对任意的$\varepsilon>0$积分

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx \text{ 及} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \quad (a<c<b)$$

存在，则在哥西意义上的主值$(V\cdot P\cdot)$为

$$V\cdot P\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right].$$

相仿地， $V\cdot P\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a} f(x)dx$.

计算下列积分：

2334. $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\quad(a>0)$.

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{a},$$

所以

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{a}.$$

2335. $\int_0^1\ln x dx$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\ln x dx=\lim_{\varepsilon\to+0}(\varepsilon-\varepsilon\ln\varepsilon-1)=-1,$$

所以

$$\int_0^1\ln x dx=-1.$$

2336. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解 由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\pi,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi.$$

2337. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-1+\varepsilon}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{0}^{1-\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[-\arcsin(-1+\varepsilon)]+\lim_{\varepsilon'\to+0}\arcsin(1-\varepsilon')$$

$$=\pi,$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi.$$

2338. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$.

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^2+x-2}=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\ln\frac{x-1}{x+2}\right)\Big|_{2}^{b}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln\frac{b-1}{b+2}+2\ln 2\right)=\frac{2}{3}\ln 2,$$

所以

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}=\frac{2}{3}\ln 2.$$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

解 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

$$=\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}{}^{*)}+C.$$

由于

$$\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right.$$

$$\left.-\left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2a+1}{\sqrt{3}}\right]\right\}$$

$$+\lim_{b\to+\infty}\left\{\left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right]\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

$$=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1921题的递推公式。

2340. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用1881题的结果。

2341. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

解 由于

$$\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\int_\varepsilon^b \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

$$=\lim_{\substack{b\to+\infty\\ \varepsilon\to+0}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)^{*)}\Bigg|_\varepsilon^b=\frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用1712题的结果。

2342. $\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解 先求$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$。设$\sqrt{1-x}=t$，则

$$x=1-t^2,\ dx=-2tdt,\ 2-x=1+t^2.$$

代入得

$$\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-2\text{arc tg }t+C=-2\text{arc tg}\sqrt{1-x}+C.$$

由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(-2\text{arc tg }\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)$$

$$=-2\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\text{arc tg }\sqrt{1-(1-\varepsilon)}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\int_0^1\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\frac{\pi}{2}.$$

2343. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解 设$\sqrt{1+x^5+x^{10}}=t-x^5$。则当$1\leqslant x<+\infty$时，$1+\sqrt{3}\leqslant t<+\infty$。代入得

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$$

$$=\frac{2}{5}\int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{5}\ln\frac{t-1}{t+1}\Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty}\ ^{*)}$$

$$=\frac{1}{5}\ln 1-\frac{1}{5}\ln\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{5}\ln\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

*） 牛顿—莱不尼兹公式对于广义积分也成立。例如

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$是一个符号，代表$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ （假定此极限存在有限），下同，不再说明。

2344. $\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

解 我们有

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{2}\int\ln x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.$$

由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left\{-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right\}\Bigg|_{\varepsilon}^{b}$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left\{-\frac{\ln b}{2(1+b^2)}+\frac{\ln\varepsilon}{2(1+\varepsilon^2)}+\frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{b^2+1}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\ln\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)}\ln\varepsilon+\frac{1}{4}\ln(\varepsilon^2+1)\right\}$$

$$=0,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=0.$$

注 $\varepsilon\to+0$与$b\to+\infty$的极限过程是独立的，因此可分别取极限。

2345. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$。

解 设 $x=\operatorname{tg} t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t\sec^2 t\,dt}{\sec^3 t}$$

$$=(t\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

2346. $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx\ (a>0)$。

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$

$$=\left(\frac{-a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

*) 利用1828题的结果.

2347. $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ $(a>0)$.

解 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$

$$=\left(\frac{-a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\right)^{*)}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

*) 利用1829题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分(n为自然数):

2348. $I_n=\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.

解 $I_n=\int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$

$$=-x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}dx=nI_{n-1},$$

即$I_n=nI_{n-1}$。利用此递推公式及

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}\,dx=1$$

容易得到

$$I_n=n(n-1)\cdots2\cdot1\,I_0=n!。$$

2349+. $I_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n}\quad(ac-b^2>0)$.

解 $$I_n=\frac{ax+b}{2(n-1)(ac-b^2)(ax^2+2bx+c)^{n-1}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{a}{2(ac-b^2)}I_{n-1}\ ^{*)}$$

$$=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1},$$

即

$$I_n=\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{a}{ac-b^2}I_{n-1}\quad(n>1).$$

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{ax^2+2bx+c}$$

$$=\frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{|a|\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\sqrt{ac-b^2}}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi\operatorname{sgn}a}{\sqrt{ac-b^2}}.$$

利用递推公式及I_1容易得到

$$I_n=\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$$

*) 利用1921题的结果。

2350⁺. $I_n=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

解 由于 $x^{n+1}\cdot\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}\longrightarrow 1$（当 $x\to+\infty$ 时），且 $n+1>1$，所以积分 I_n 收敛。

其次，我们来计算 I_n。由于

$$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$=\frac{1}{n!\,x}-\frac{1}{(n-1)!\,(x+1)}+\frac{1}{2!(n-2)!(x+2)}$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!\,(x+k)}$$

$$+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!\,(x+n)},$$

所以

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_1^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k\frac{bx}{x+k}$$

$$=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\ln(x+k)\Big|_1^{+\infty},$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数。

对于 n，不论是偶数还是奇数，用上限代入（此处理解为趋近于无穷时的极限）后均为零。事实上，

当 $n=2m$ 时，

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k)$$

$$=\ln\frac{x\cdot(x+2)^{C_{2m}^2}\cdots(x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1}(x+3)^{C_{2m}^3}\cdots(x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}}.$$

由于

$$1+C_{2m}^2+\cdots+C_{2m}^{2m}=C_{2m}^1+C_{2m}^3+\cdots+C_{2m}^{2m-1},$$

所以，当 $m\to+\infty$ 时

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k)\longrightarrow \ln 1=0;$$

当 $n=2m-1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^k C_{2m-1}^k \ln(x+k)$$

$$=\ln\frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1}(x+3)^{C_{2m-1}^3}\cdots(x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}}$$

$$\longrightarrow 0\ （当 m\to+\infty 时）.$$

最后我们得到

$$I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k).$$

2351. $I_n=\int_0^1\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 由于 $\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\longrightarrow\frac{1}{2}$

（当 $x\to1-0$ 时），

且 $p=\frac{1}{2}<1$，所以积分 I_n 收敛。

其次，设 $x=\sin t$，则

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\text{当 } n=2k \text{ 时；}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!},\text{当 } n=2k-1 \text{ 时。}\end{cases}$$

*) 利用2281题的结果。

2352. $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}$。

解 设 $x=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$，则

当 $0\leqslant x<+\infty$ 时，$\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi$，

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du$$

$$=\begin{cases}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{当 } n=2k \text{ 时；}^{*)}\\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!},\ \text{当 } n=2k-1 \text{ 时。}\end{cases}$$

*) 利用2282题的结果。

2353. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx$； (б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,dx$。

解 先证明它们是收敛的。事实上，当 $x\to+0$ 时，$\sqrt{x}\cdot\ln\sin x\to0$，所以，积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx$$

收敛。

同法可证积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$

也收敛。

其次，求这两个积分的值。设 $t=\frac{\pi}{2}-x$，则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx=A.$$

相加得

$$\begin{aligned}
2A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln \sin x+\ln \cos x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \, dx-\ln 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin t \, dt\right)-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt-\frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= A-\frac{\pi}{2}\ln 2,
\end{aligned}$$

于是，$2A=A-\frac{\pi}{2}\ln 2$，$A=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x\, dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2 .$$

2354. 求：

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx,$$

其中E表区间$(0, +\infty)$中使被积分式有意义的一切x值所成之集合。

解 $\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx, ^*$$

对于广义积分$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$

作如下处理：

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$=\int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\sin x}} dx+$$

$$+\int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

---

*记号$\sum_{k=0}^{\infty} S_k$理解为极限$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$，以后题解中不再说明。

$$=2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi}-2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}\Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi}$$

$$=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-k\pi}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}.$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}e^{-k\pi}=2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1-e^{-(n+1)\pi}}{1-e^{-\pi}}.$$

当$n\to+\infty$时，上式的极限为$2\sqrt[4]{8}\cdot e^{-\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi}}$.

于是，

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}}\frac{|\sin x-\cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx=\frac{2\sqrt[4]{8}e^{-\frac{\pi}{8}}}{1-e^{-\pi}}.$$

2355. 证明等式

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(\sqrt{x^2+4ab})dx,$$

其中$a>0$，$b>0$（假定等式左端的积分有意义）.

证 设$ax-\frac{b}{x}=t$，则

当$0<x<+\infty$时，$-\infty<t<+\infty$，

$$ax+\frac{b}{x}=\sqrt{t^2+4ab}.$$

将此二式相加得

$$x=\frac{1}{2a}(t+\sqrt{t^2+4ab}),$$

从而有

$$dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt.$$

代入欲证的等式左端，得

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{0} f(\sqrt{t^2+4ab})\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})\cdot\frac{t+\sqrt{t^2+4ab}}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})$$

$$\cdot\frac{\sqrt{t^2+4ab}-t+\sqrt{t^2+4ab}+t}{\sqrt{t^2+4ab}}dt$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2+4ab})dt,$$

于是

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})dx.$$

2356. 数

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(\xi)d\xi$$

称为函数$f(x)$在区间$(0, +\infty)$上的平均值. 求下列函数的平均值:

(a) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(x\sqrt{2})$;

(б) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$; (в) $f(x)=\sqrt{x}\sin x$.

解 (a) 由于

$$\int_0^x [\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi$$

$$=\int_0^x\left[\frac{1-\cos 2\xi}{2}+\frac{1+\cos(2\xi\sqrt{2})}{2}\right]d\xi$$

$$=x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2}),$$

所以

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x [\sin^2\xi+\cos^2(\xi\sqrt{2})]d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{4x}\sin 2x+\frac{1}{4x\sqrt{2}}\sin(2x\sqrt{2})\right]$$

$$=1;$$

(б) $$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arc\,tg}\xi\, d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left[x\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{2x}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2(1+x^2)}=\frac{\pi}{2};$$

(в) 利用第二中值定理，得

$$\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi=\sqrt{x}\int_c^x\sin\xi\,d\xi$$

$$=\sqrt{x}(\cos c-\cos x)\quad(0\leqslant c\leqslant x),$$

于是，

$$M[f]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{\xi}\sin\xi\,d\xi$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos c-\cos x}{\sqrt{x}}=0.$$

2357. 求：

(a) $\lim\limits_{x\to0}x\int_x^1\frac{\cos t}{t^2}dt$； (б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}$；

(в) $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}t^{-1}e^{-t}\,dt}{\ln\frac{1}{x}}$ *)；

(г) $\lim\limits_{x\to+0}x^a\int_x^1\frac{f(t)}{t^{a+1}}dt$ *)，

其中$a>0$，$f(t)$为闭区间[0，1]上的连续函数。

解 (a) 由于

$$1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos t\leqslant1,$$

所以

$$\int_x^1 \frac{1-\frac{t^2}{2}}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

计算得

$$-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x} \leqslant \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt \leqslant -1+\frac{1}{x}.$$

又由于

$$\lim_{x\to 0} x\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)=1$$

及

$$\lim_{x\to 0} x\left(-1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

故最后得到

$$\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}dt=1;$$

(б) 由于

$$t^2<\sqrt{1+t^4},$$

所以

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt > \int_0^x t^2 dt=\frac{x^3}{3},$$

从而当 $x\to+\infty$ 时，$\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt \to +\infty$.

利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^2}=\frac{1}{3};$$

(в) 由于 $\lim\limits_{t\to+0} t\cdot(t^{-1}e^{-t})=1$，故广义积分 $\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt$ 发散。从而，所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。利用洛比塔法则，得

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{-e^{-x}\cdot x^{-1}}{-\frac{1}{x}}=1;$$

(г)由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta'>0$，使当 $0<t<\delta'$ 时，恒有

$$|f(t)-f(0)|<\frac{\alpha\varepsilon}{2}.$$

今又取 $0<\delta<\delta'$，使当 $0<x<\delta$时，有

$$\left|x^{\alpha}\int_{\delta'}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $0<x<\delta$时，就有

$$\left|x^{\alpha}\int_x^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|$$

$$=\left|x^{\alpha}\int_x^{\delta'}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right.$$

$$\left.+x^{\alpha}\int_{\delta'}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\alpha\varepsilon}{2}\cdot x^{\alpha}\int_x^{\delta'}\frac{dt}{t^{\alpha+1}}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}x^{\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha}}-\frac{1}{\delta'^{\alpha}}\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{f(t)-f(0)}{t^{\alpha+1}}dt=0,$$

最后得到

$$\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}dt=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}\int_{x}^{1}\frac{f(0)}{t^{\alpha+1}}dt$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}f(0)\left[-\frac{1}{\alpha}t^{-\alpha}\right]\Bigg|_{x}^{1}$$

$$=\lim_{x\to+0}x^{\alpha}f(0)\left(\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{f(0)}{\alpha}.$$

*) 原题(в)(г)中 $x\to+0$ 误印为 $x\to0$。

研究下列积分的收敛性：

2358. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2}dx}{x^{4}-x^{2}+1}$.

解 由于$x^{2}\frac{x^{2}}{x^{4}-x^{2}+1}\longrightarrow1$（当 $x\to+\infty$时），

所以积分 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{2}dx}{x^{4}-x^{2}+1}$ 收敛。

2359. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^{2}+1}}$.

解 由于$x^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x^{2}+1}}\longrightarrow1$（当$x\to+\infty$时），

所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$收敛。

2360. $\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$。

解 当$0<x<1$时$\ln x<0$。由于

$$\lim_{x\to1-0}(1-x)\cdot\frac{1}{-\ln x}=\lim_{x\to1-0}\frac{-1}{-\frac{1}{x}}=1,$$

所以积分$\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$发散，从而积分$\int_0^2\frac{dx}{\ln x}$也发散。

2361. $\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$。

解 将积分分成$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx=\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$

$+\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$。

对于积分$\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$。由于

$$x^{1-p}\cdot(x^{p-1}e^{-x})\longrightarrow1\ （当x\to+0时），$$

故当$p>0$时（从而$1-p<1$），积分$\int_0^1x^{p-1}e^{-x}dx$收敛。

对于积分$\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$。由于

$$x^2\cdot(x^{p-1}e^{-x})=\frac{x^{p+1}}{e^x}\longrightarrow0\ （当x\to+\infty时），$$

故对于一切p值，积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$ 恒收敛。

于是，当$p>0$时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx$$

收敛。

2362. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$。

解 将积分分成 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$

$+ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$。

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$，由于

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^{-q}\cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} = \left(\lim_{x\to 1-0} x^p \left(\frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)\right)^q$$

$$= \left(\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln\frac{1}{x}}{1-x}\right)^q = \left(\lim_{x\to 1-0} \frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1}\right)^q = 1,$$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$ 当$-q<1$（即$q>-1$）时收敛，当$-q\geqslant 1$（即$q\leqslant -1$）时发散。于是，当$q\leqslant -1$时，$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$必发散。故下面可在$q>-1$的假定下来讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}\,dx$。

若$p>-1$，可取$\tau>0$充分小，使$p-\tau>-1$。于是

$$\lim_{x\to+0} x^{-p+\tau}\cdot x^p \ln^q \frac{1}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q}{\left(\frac{1}{x}\right)^\tau}=0.$$

由于 $p+\tau<1$，故此时$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$收敛；

若$p\leqslant-1$（设$q>-1$），则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}dx \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1} \ln^q \frac{1}{x}dx$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^q d\left(\ln\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{q+1}}{q+1}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=+\infty,$$

故此时$\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$发散。

总之，仅当$p>-1$且$q>-1$时积分

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}dx\text{收敛。}$$

2363. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ （$n\geqslant0$）。

解 先考虑积分$\int_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx$。由于

$$x^{-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}\longrightarrow 1 \text{（当}x\to+0\text{时）},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $-m<1$，即仅当 $m>-1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$。由于

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m}{1+x^n}\longrightarrow 1\ （当x\to+\infty时），$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ 仅当 $n-m>1$ 时收敛。

于是，当 $m>-1$ 且 $n-m>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx\ (n\geqslant 0)$$

收敛。

2364. $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx\quad(a\neq 0)$。

解 由于 $\operatorname{arc\,tg} ax=-\operatorname{arc\,tg}(-ax)$，故可设 $a>0$，

先考虑积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0}x^{n-1}\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{a}{1+a^2x^2}}{1}=a,$$

故积分 $\int_0^1\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$。由于

$$x^n\cdot\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}\longrightarrow\frac{\pi}{2}\text{（当}x\to+\infty\text{时）},$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx$ 仅当 $n>1$ 时收敛。

于是，仅当 $1<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^n}dx\quad(a\neq 0)$$

收敛。

2365. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$。

解 先考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$，当 $n>1$ 时，取 $\alpha>0$ 充分小，使 $n-\alpha>1$。由于

$$x^{n-\alpha}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\longrightarrow 0$$

（当 $x\to+\infty$ 时），

故此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 收敛。当 $n\leqslant 1$ 时，由于

$$x^n\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}\longrightarrow+\infty\text{（当}x\to+\infty\text{时）},$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 发散。

再考虑积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0} x^{n-1}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^n}=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$ 仅当 $n-1<1$ 即当 $n<2$ 时收敛。

于是，仅当 $1<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$$

收敛。

2366. $\int_0^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx \quad (n\geqslant 0)$。

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0} x^{-m-1}\cdot\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=\frac{1}{2},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$ 仅当 $-m-1<1$ 即当 $m>-2$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$。由于

$$x^{n-m}\cdot\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}$$

$$=\frac{x^n \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}\longrightarrow\frac{\pi}{2}\quad（当x\to+\infty时），$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}dx$仅当$n-m>1$时收敛。

于是，仅当$m>-2$且$n-m>1$时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^n}\quad(n\geqslant 0)$$

收敛。

2367. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx\quad(n\geqslant 0)$。

解 当$a\neq 0$时，设$f(x)=\cos ax$，$g(x)=\frac{1}{1+x^n}$，则对于任意的$A>0$，均有$\left|\int_0^A f(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{a}$；其次，当$n>0$时，$g(x)$单调下降且趋于零（$n\to+\infty$）。从而得知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$$

收敛。至于当$n=0$时，积分显然发散。

当$a=0$时，由于

$$x^n\cdot\frac{1}{1+x^n}\longrightarrow 1\quad（当x\to+\infty时），$$

故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx$仅当$n>1$时收敛。

于是，当 $a\neq 0$、$n>0$ 及 $a=0$、$n>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}dx.$$

收敛。

2368. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

解 方法一：

$$\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right).$$

积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ 显然发散。

又因对于任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A \cos 2x\,dx\right|\leqslant 2$，

且当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx \text{收敛。}$$

于是，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$ 发散，从而积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

发散。

方法二：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{t+n\pi}dt\geqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

由于不论N取多大，只要取$p=N$，就有

$$\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{1}{k}=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{2N}>\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\cdots+\frac{1}{2N}}_{N\text{个}}$$

$$=\frac{1}{2N}\cdot N=\frac{1}{2},$$

故递增叙列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$是$+\infty$，即$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$。

于是，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x}dx$$

发散。

2369. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^px\cos^qx}$。

解 先考虑积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^px\cos^qx}$。对于任何$q$值，由于

$$\lim_{x\to+0}x^p\cdot\frac{1}{\sin^px\cos^qx}$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{t}\cdot\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{\cos^{q} x}\right)=1,$$

故积分 $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^{p} x\cos^{q} x}$ 仅当 $p<1$（q为任意值）时收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p} x\cos^{q} x}$。对于任何 p 值，由于

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{q}\cdot\frac{1}{\sin^{p} x\cos^{q} x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x}\right)^{q}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\sin^{p} x}\right)$$

$$=\lim_{t\to+0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{q}=1,$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p} x\cos^{q} x}$ 仅当 $q<1$（p为任意值）时收敛。

于是，当$p<1$且$q<1$时，积分

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^{p} x\cos^{q} x}$$

收敛。

2370. $\int_{0}^{1}\frac{x^{n}dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-n}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n<1$ 即当 $n>-1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$。对于任意的 n，由于

$$\lim_{x\to1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to1-0}\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 恒收敛。

于是，当 $n>-1$ 时，积分

$$\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

收敛。

2371. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$。

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$。不妨设 $\min(p,q)=p$，

由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^p\cdot\frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{1}{1+x^{q-p}}=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $p<1$ 即当 $\min(p,q)<1$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$。不妨设 $\max(p,q)=q$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^q\cdot\frac{1}{x^p+x^q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-(q-p)}+1}=1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$ 仅当 $q>1$ 即当 $\max(p,q)>1$ 时收敛。

于是，当 $\min(p,q)<1$ 且 $\max(p,q)>1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$$

收敛。

2372. $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。由于

$$\lim_{x\to+0}\left(\sqrt{x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛。

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$。由于

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\sqrt{1-x}\cdot\frac{\ln x}{1-x^2}\right)=0,$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 收敛。

于是，积分

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$$

收敛。

2373. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$。

解 由于

$$\lim_{x\to+0}\left[x^{\frac{5}{6}}\cdot\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+0}\left[\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{\sin x}\ln(\sin x)\right]=0,$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$ 收敛。

2374. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$。

解 先考虑 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$。对于任意的 p，由于

$$\lim_{x\to 1+0}\left[(x-1)^q\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 1+0}\left[\frac{1}{x^p}\cdot\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\right]=\left(\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q$$

$$=\left(\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^q=1,$$

故积分 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 仅当 $q<1$ 且 p 为任意值时收敛。

再考虑积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$。如果 $p>1$，取 $\alpha>0$ 充分小，使 $p-\alpha>1$，则对于任意的 q，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^{p-\alpha}\cdot\frac{1}{x^p\ln^q x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^\alpha\ln^q x}\right)=0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛；如果 $p\leqslant 1$，$q<1$，由于

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}\geqslant\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}$$

$$=\frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q}\Bigg|_2^{+\infty}=+\infty,$$

故积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 发散。

于是，当 $p>1$ 且 $q<1$ 时，积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$$

收敛。

2375. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

解 先考虑积分 $\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$. 对于任意的$p$和$q$，由于

$$\lim_{x\to e+0}\frac{(x-e)^r}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\frac{1}{e^p}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{x-e}{\ln\ln x}\right)^r$$

$$=\frac{1}{e^p}\left(\lim_{x\to e+0}\frac{1}{\frac{1}{x\ln x}}\right)^r=e^{r-p},$$

故积分 $\int_e^3\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 仅当$r<1$和p、q为任意值时收敛。

再考虑积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$. 分三种情形讨论：（1）如果 $p>1$，q和r为任意值．取$\alpha>0$充分小，使$p-\alpha>1$．由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p-\alpha}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=0,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛；

（2）当$p=1$时，则有

$$\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\int_{1.3}^{+\infty}\frac{dx}{x^q(\ln x)^r},$$

利用2374题的结果得知，当 $p=1$，$q>1$ 和 $r<1$ 时

积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 收敛；

（3）当 $p<1$ 时，取 $\delta>0$ 充分小，使 $p+\delta<1$，对于任意的 q 和 r，由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{p+\delta}}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\delta}{(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=+\infty,$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$ 发散。

于是，当 $p>1$，q 是任意的，$r<1$ 和当 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 时，积分

$$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$$

收敛。

2376. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$.

解 首先，被积函数关于$\frac{1}{x}$是$\sum_{i=1}^{n}p_i$级无穷小（当$x\to\pm\infty$时）。

其次（不妨设当$i\neq j$时，$a_i\neq a_j$），

$$\lim_{x\to a_i}\left[|x-a_i|^{p_i}\cdot\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\right]$$

$=c_i$，$0<c_i<+\infty$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ 仅当

$\sum_{i=1}^{n}p_i>1$ 且 $p_i<1$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时收敛。

2377. $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$，

式中$P_m(x)$及$P_n(x)$为次数分别为m及n的互质的多项式。

解 当$P_n(x)=0$在$[0,+\infty)$上有根λ并设其重数为$r(\geqslant1)$时，由于$P_n(x)$与$P_m(x)$互质，故λ不是$P_m(x)$的根。从而有

$$\lim_{x\to\lambda}\left[(x-\lambda)^r\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=a\neq0,$$

而且显然在点λ的右（左）近旁，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$都保持定号。由于$r\geqslant1$，故积分发散。由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^{n-m}\cdot\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right]=b\neq0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$ 仅当 $n-m>1$ 即当 $n>m+1$

时收敛。

于是，当$P_n(x)$在区间[0，$+\infty$)内无根且$n>m+1$时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}dx$$

收敛。

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性：

2378. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$。

解 对于任意的$A>1$，由于$\left|\int_1^A \sin x dx\right|\leqslant 2$，且当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{x}$单调地趋于零，故积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛。而积分$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$是普通的定积分$\left(\frac{\sin x}{x}\right.$在$x=0$有可去间断点，故补充定义其值为1后，$\frac{\sin x}{x}$可视为[0，1]上的连续函数$\left.\right)$，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

收敛，但它不是绝对收敛的。事实上，当$x>0$时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}$，由2368题知，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$发散，故积分$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$发散。

2379. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$.

解 对于任意的$A>0$，由于$\left|\int_0^A\cos x\,dx\right|\leqslant 2$，且当$x\to+\infty$时，$\frac{\sqrt{x}}{x+100}$单调地趋于零，故积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100}dx$$

收敛。但它不是绝对收敛的。事实上，由于

$$\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}\geqslant\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+100}+\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}\right),$$

且$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x+100}\right)=1$，故积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+100}dx$发散。仿照前半段证明，可知$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos 2x}{x+100}dx$收敛。从而，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\cos^2 x}{x+100}dx$发散。于是，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,|\cos x|}{x+100}dx$$

发散。

2380. $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx\quad(q\neq 0)$.

解 设 $t=x^q$，则 $dx=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt$. 于是

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,dx=\frac{1}{|q|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 由于

$$\lim_{t\to+0}\left(t^{-\frac{p+1}{q}}\cdot t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right)=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 仅当 $-\frac{p+1}{q}<1$，即当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时收敛，又由于被积函数在[0，1]上非负，故也是绝对收敛的。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$. 如果 $\frac{p+1}{q}<1$，则由于对任意的 $A>1$，$\left|\int_1^A\sin t\,dt\right|\leqslant 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$ 单调地趋于零（当 $t\to+\infty$ 时），故此时积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q}=1$，则积分 $\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 显然发散，从而积分 $\int_0^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\cdot\sin t\,dt$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q}>1$，则由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}=+\infty$，故对任给的 $A>0$，总存在自然数 N，使有

$2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$，且当 $t>2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，$t^{\frac{p+1}{q}-1}>\sqrt{2}$。

今取

$$A'=2N\pi+\frac{\pi}{4},\quad A''=2N\pi+\frac{\pi}{2},$$

则有

$$\left|\int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt\right|>\sqrt{2}\left|\int_{A'}^{A''}\sin t\,dt\right|$$

$$=1,$$

它不可能小于任给的 ε （$0<\varepsilon<1$），因而，积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt,$$

发散，从而积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

也发散。

于是，仅当 $-1<\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

收敛，且当 $\frac{p+1}{q}>-1$ 时，积分

$$\int_0^{1} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

绝对收敛。

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 的绝对收

敛性。分三种情形讨论：

（1）当$\frac{p+1}{q}<0$时，由于

$$\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|\leqslant t^{\frac{p+1}{q}-1}\quad(1\leqslant t<+\infty),$$

且$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}dt$收敛，故当$\frac{p+1}{q}<0$时，积分

$\int_1^{+\infty}t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$ 绝对收敛；

（2）当$\frac{p+1}{q}=0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt$$

$$=\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt=+\infty,$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛)；

（3）当$\frac{p+1}{q}>0$时，由于

$$\int_1^{+\infty}\left|t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\right|dt$$

$$\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}dt=+\infty,$$

故此时积分也不是绝对收敛的。

于是，当$-1<\frac{p+1}{q}<0$时，积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}\sin t\,dt$$

绝对收敛。

最后我们得到：当 $-1<\frac{p+1}{q}<0$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)dx$$

绝对收敛；当 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时，积分条件收敛。

2381. $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx\quad(q\geqslant 0)$.

解 先考虑积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$. 由于

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{-1-p}\cdot\frac{x^p\sin x}{1+x^q}\right)$$

$$=\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+x^q}\right)=1,$$

故积分 $\int_0^1\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 仅当 $-1-p<1$ 即当 $p>-2$ 时收敛，且是绝对收敛的。

再考虑积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$. （1）若 $p\geqslant q$，则对任何 $A>1$，必存在正整数 N，使 $2N\pi+\frac{\pi}{4}>A$ 且当 $x\geqslant 2N\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，恒有 $\frac{x^p}{1+x^q}>\frac{1}{3}$. 于是，对

$A'=2N\pi+\frac{\pi}{4}$，$A''=2N\pi+\frac{\pi}{2}$，有

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{x^p}{1+x^q}\sin x\,dx\right|>\frac{1}{3}\int_{A'}^{A''}\sin x\,dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6},$$

它不可能小于任给的 ε，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 发散。（2）若 $p<q-1$，取 $\alpha>0$ 使 $p+\alpha<q-1$，即 $q-p-\alpha>1$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{q-p-\alpha}\cdot\frac{x^p}{1+x^q}|\sin x|$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^q}\cdot\frac{|\sin x|}{x^\alpha}=0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 绝对收敛。（3）现设 $q-1\leqslant p<q$。先证 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}dx$ 发散。事实上，此时，可取 $A_0>1$，使当 $x\geqslant A_0$ 时，$\frac{x^{p+1}}{1+x^q}>\frac{1}{3}$；

故 $\int_{A_0}^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}dx=\int_{A_0}^{+\infty}\frac{x^{p+1}}{1+x^q}\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$

$$\geqslant\frac{1}{3}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty,$$

从而 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p|\sin x|}{1+x^q}dx$ 发散。

再证 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 收敛。事实上，若 $q=0$，则 $-1\leqslant p<0$，此时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}x^p\sin x dx$ 显然收敛；若 $q>0$，由于

$\left(\frac{x^p}{1+x^q}\right)'=\frac{x^{p-1}[p-(q-p)x^q]}{(1+x^q)^2}<0$（当 x 充分大时），

故当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零。而

$\left|\int_1^A\sin x\,dx\right|=\left|\cos 1-\cos A\right|\leqslant 2$ 有界，故积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 收敛。总之，我们证明了：当 $q-1\leqslant p<q$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 条件收敛。

于是，最后得结论：积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ 当 $p>-2$，$q>p+1$ 时绝对收敛；当 $p>-2$，$p<q\leqslant p+1$ 时条件收敛。

2382. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$。

解 当 $n\leqslant 0$ 时，积分显然是发散的。

当 $n>0$ 时，首先考虑积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ $(a>1)$。由于

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx,$$

而

$$\left|\int_a^A\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)dx\right|$$

$$=\left|\cos\left(a+\frac{1}{a}\right)-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2.$$

又当 x 充分大时，有

$$\frac{d}{dx}x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=nx^{n-3}\left(x^2-\frac{n-2}{n}\right)>0,$$

故当 x 充分大时，函数 $x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$ 是增加的，从而函数 $\frac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$ 当 $x\to+\infty$ 时递减趋于零。由此可知，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ 当 $n>0$ 时收敛。

再考虑积分 $\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$ $(0<a'<1)$。

设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^{a'}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx=\int_{\frac{1}{a'}}^{+\infty}\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{2-n}}dt,$$

由前所述，此积分仅当 $2-n>0$ 即当 $n<2$ 时收敛。

请注意，$\int_{a'}^{a}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx\ (0<a'<1<a)$ 是一个通常的积分，它对任意 n 均有意义。

于是，当 $0<n<2$ 时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

收敛。

可以证明：积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

当 $0<n<2$ 时发散。事实上，

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}\geqslant\frac{\sin^2\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}$$

$$=\frac{1-\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{2x^n},$$

而当 $0<n\leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^n}$ 显然发散，积分

$\int_a^{+\infty}\frac{\cos\left(2x+\frac{2}{x}\right)}{x^n}dx$收敛（仿前半段证明），故当

$0<n\leqslant 1$时，积分$\int_a^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散，

从而当$0<n\leqslant 1$时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

发散。对于$1<n<2$的情况，可考虑对积分作变换

$x=\frac{1}{t}$，则得

$$\int_0^{a}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

$$=\int_{\frac{1}{a}}^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)\right|}{t^{2-n}}dt.$$

仿前可知，当$0<2-n\leqslant 1$即当$1\leqslant n<2$时，积分

$\int_0^{a}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散。从而，当$1<n<2$

时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$$

发散

最后我们得到：当$0<n<2$时，积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$$

条件收敛。

2383⁺. $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$,

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式，且若 $x\geqslant a$，$P_n(x)>0$。

解 今仿2381题解之。设

$$P_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m,$$

$$P_n(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n,$$

其中m，n是非负整数，$a_0\neq0$，$b_0\neq0$。

（1）若 $n>m+1$，可取 $\alpha>0$ 充分小，使 $n-\alpha>m+1$。由于

$$\lim_{x\to+\infty}x^{n-m-\alpha}\cdot\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^nP_m(x)}{x^mP_n(x)}\right|\cdot\frac{|\sin x|}{x^{\alpha}}=0,$$

而$n-m-\alpha>1$，故积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$ 绝对收敛。

（2）若 $n=m+1$。我们证明此时 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x dx$ 条件收敛。事实上，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_0}{b_0}$，故存在$A_0>a$,使当$x\geqslant A_0$时,恒有$\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|>\frac{|a_0|}{2|b_0|}$,

于是

$$\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$$

$$=\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{xP_m(x)}{P_n(x)}\right|\cdot\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx$$

$$\geqslant\frac{|a_0|}{2|b_0|}\int_{A_0}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty,$$

故 $\int_a^{+\infty}\left|\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\right|dx$ 发散。此外，易知（$n=m+1$时）

$$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'=\frac{1}{[P_n(x)]^2}\{-a_0b_0x^{2m}-2a_1b_0x^{2m-1}+\cdots+(a_{m-1}b_{m+1}-a_mb_m)\},$$

故若$a_0b_0>0$，则当x充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'<0$，函数$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$减小；若$a_0b_0<0$，则当$x$充分大时，$\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\right)'>0$，函数$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$增加。总之，当$x\to+\infty$时，$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$单调地趋于零。又显然可知

$\left|\int_a^A\sin x\,dx\right|\leqslant 2$，故积分 $\int_a^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\sin x\,dx$收敛。

（3）若 $n < m+1$，由于 n，m都是非负整数，故 $n \leqslant m$。因此

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & 若 n = m; \\ +\infty, & 若 n < m 且 a_0 b_0 > 0; \\ -\infty, & 若 n < m 且 a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

于是，存在$A^* > a$及$\tau > 0$，使当 $x \geqslant A^*$时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 保持定号且$\left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \tau$。今对任何$A > a$，可取正整数$N$，使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} \geqslant \max\{A, A^*\}$。令$A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$，$A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$，则

$$\left| \int_{A'}^{A''} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx \right| > \tau \int_{A'}^{A''} \sin x \, dx$$

$$= \frac{\tau\sqrt{2}}{2},$$

它不能小于任意的$\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{\tau\sqrt{2}}{2} \right)$，故

$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx$ 发散。

最后，我们得出：$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \, dx$ 当 $n > m+1$ 时绝对收敛；当 $n = m+1$ 时条件收敛。

2384. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$收敛，则当$x \to +\infty$时是否必有$f(x) \to 0$？

研究例子：

(a) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$； (б) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$。

解 不一定．例如

(a) 积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$收敛．事实上，它是2380题之特例：$p=0$，$q=2$．但是，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin(x^2)$不存在；

(б) 先证积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛．事实上，对任何 $A>0$，存在唯一的非负整数 n，使$\sqrt{n}\leqslant A<\sqrt{n+1}$．显然 $A\to+\infty$相当于$n\to\infty$．当$\sqrt{k}\leqslant x<\sqrt{k+1}$（$k$—非负整数）时，$[x^2]=k$．于是

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}}(-1)^k dx+(-1)^n(A-\sqrt{n})$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}+(-1)^n(A-\sqrt{n})。$$

由于$\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$递减趋于0（当$k\to\infty$时），故

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$存在有限（参看2656题前面的变号级数的莱布尼兹判别法），设为S．又显然

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\longrightarrow 0\ （当 n\to\infty 时），$$

故 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}dx=S$，因此

积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛。

但显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-1)^{[x^2]}$ 不存在。

2385. 于$[a,\ b]$上有定义的，无界函数 $f(x)$ 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x)dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限？式中 $x_i\leqslant\xi_i\leqslant x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$。

解 不能。因为若 $c(a\leqslant c\leqslant b)$ 是瑕点，则对于$[a,b]$的任何分法，不论其 $\max|\Delta x_i|$ 多么小，当分法确定以后，设 $c\in[x_i,\ x_{i+1}]$，则总可以取 ξ_i，使 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于任何予先给定的值。因此，当 $\max|\Delta x_i|\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ 不可能具有有限极限。

2386. 设：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx \qquad (1)$$

收敛，函数$\varphi(x)$有界，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad (2)$$

是否必定收敛？举出适当的例子。

若积分（1）绝对收敛，问积分（2）的收敛性如何？

解 不。例如，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛*)．且$\varphi(x)=\sin x$有界，但是积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

是发散的**)．

若积分（1）绝对收敛，$\varphi(x)$有界，则积分（2）一定是绝对收敛的。事实上，设$|\varphi(x)|\leqslant L$，则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)|\leqslant L\cdot|f(x)|$$

及$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$的收敛性即可获证。

*) 利用2378题的结果。

**) 利用2368题的结果。

2387. 证明，若$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$f(x)$为单调函数，则$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$*)．

证 不妨设$f(x)$单调减小。先证当$x\geqslant a$时，$f(x)\geqslant 0$。若不然，则存在点$c\geqslant a$，使$f(c)<0$。由于$f(x)$单调减小，故当$x\geqslant c$时，$f(x)\leqslant f(c)$，从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx\leqslant \int_c^{+\infty} f(c)dx=-\infty.$$

因此，积分

$$\int_c^{+\infty} f(x)dx$$

发散，这与积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛矛盾。于是，$f(x)$为非负的单调函数。

下面证明$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$。由于积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx$$

收敛，故对任给的$\varepsilon>0$，总存在$A>a$，使当$x>A$时，恒有

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\right|=\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt\geqslant f(x)\cdot\left(x-\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{x}{2}f(x),$$

故当$x>A$时，

$$0\leqslant xf(x)<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=0 \quad \text{或} f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调增大，则可考虑 $-f(x)$（它是单调减小的），同法可证得 $f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*） 原题为 $f(x)=O\left(\frac{1}{x}\right)$，现在的结果更好。

2388. 设函数 $f(x)$ 于区间 $0<x\leqslant 1$ 内是单调的函数，且在点 $x=0$ 的邻域内是无界的，证明若

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是单调下降的.这时 $\lim_{x\to+0} f(x)=+\infty$。先设 $f(x)\geqslant 0$（$0<x\leqslant 1$ 时）。由于积分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

存在，故把区间 $[0,1]$ n 等分后，即得

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

$$<\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

另一方面，又有

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}.$$

从而就有

$$0 < \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx.$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx = 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

如果不满足 $f(x)\geqslant 0$，即 $f(x)$ 可正可负．则函数 $\varphi(x)=f(x)-f(1)$ 满足 $\varphi(x)\geqslant 0\ (0<x\leqslant 1)$，且同样是单调下降，$\lim\limits_{x\to+0}\varphi(x)=+\infty$．故根据已证的结果，知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x)dx,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(1)\right]$$

$$= \int_0^1\left[f(x)-f(1)\right]dx,$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx.$$

当$f(x)$在$[0,\ 1]$单调增加时（这时$\lim\limits_{x\to+0} f(x)=-\infty$），只需对函数$-f(x)$应用上述结果即获证。

2389. 证明：若函数$f(x)$于区间$0<x<a$内是单调的，且

$$\int_0^a x^p f(x)dx$$

存在，则

$$\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

证 不妨设$f(x)$在$0<x<a$是单调递减的。先设存在$0<\delta<a$使在$0<x<\delta$时$f(x)\geqslant 0$。这时，当$0<x<\delta$时，有

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)\,dt \geqslant f(x)\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p\,dt$$

$$=C_p x^{p+1} f(x)\geqslant 0,$$

其中$C_p=\begin{cases}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{p+1}}{p+1}, & \text{当}p\neq-1\text{时}; \\ \ln 2, & \text{当}p=-1\text{时}.\end{cases}$

故C_p是正的常数。

于是，由$\int_0^a x^p f(x)dx$存在，知

$$\lim_{x\to+0}\int_{\frac{x}{2}}^{x} t^p f(t)dt=0,\ \text{从而}\lim_{x\to+0} x^{p+1} f(x)=0.$$

再设不存在上述δ。于是，根据$f(x)$的递减性，

知当$0<x<a$时恒有$f(x)<0$。于是，当$0<x<\dfrac{a}{2}$

时，有

$$\int_x^{2x} t^p f(t)\,dt \leqslant f(x)\int_x^{2x} t^p\,dt$$

$$= C_p^* x^{p+1} f(x) < 0\,,$$

其中$C_p^* = \begin{cases} \dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & 当 p \neq -1 时; \\ \ln 2, & 当 p = -1 时. \end{cases}$

故C_p^*也是正的常数。

于是，$|x^{p+1} f(x)| < \dfrac{1}{C_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)dt\right|$.

根据$\int_0^a x^p f(x)dx$的存在性，知

$$\lim_{x\to+0}\int_x^{2x} t^p f(t)dt = 0\,,$$

从而$\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1} f(x) = 0$. 证完。

2390. 证明

(a) $V.P.\int_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x} = 0$;

(б) $V.P.\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{1-x^2} = 0$;

(в) $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx = 0$.

证 (a) 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right\}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}(\ln\varepsilon-\ln 1+\ln 1-\ln\varepsilon)=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=0;$$

(б) 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{1-x^2}+\int_{1+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{1-x^2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+b}{1-b}\right|\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right|\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{2-\varepsilon}{2+\varepsilon}\right|=0,$$

所以

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}=0;$$

(в) 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\sin x\,dx=\lim_{b\to+\infty}(-\cos b+\cos b)$$

$$=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\,dx=0.$$

2391. 证明：当 $x\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$ 时，

$$\text{li}\,x=V.P.\int_0^{x}\frac{d\xi}{\ln\xi}$$

存在*)。

证 当 $0 \leqslant x < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{\xi \to +0} \frac{1}{\ln \xi} = 0$，故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 $x = 0$ 处补充定义后成为连续函数，于是积分存在。

当 $x > 1$ 时，首先注意到下面这样一个结论：当 $a < c < b$ 时，

$$V.P. \int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right)$$

$$= \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

其次，利用具比亚诺型余项的台劳公式，有

$$\ln x = (x-1) + [\alpha(x) - 1] \frac{(x-1)^2}{2},$$

式中 $\lim\limits_{x \to 1} \alpha(x) = 0$。由此即得

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1 + \frac{[\alpha(x)-1]}{2}(x-1)},$$

上述等式右端的第二项在 $x = 1$ 的附近保持有界，且对于任意的 x 值连续，因而是可积分的。第一项的"主值"如前所述，它是存在的。

于是，当 $x \geqslant 0$ 且 $x \neq 1$ 时，$\mathrm{li}\, x$ 存在。

*) 原题误为"当 $x \geqslant 0$ 时，…"。

求下列积分：

2392. $V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

解 由于

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x^2-3x+2}+\int_{1+\varepsilon}^{2-\eta}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right.$$

$$\left.+\int_{2+\eta}^{b}\frac{dx}{x^2-3x+2}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0\\ b\to+\infty}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}-\ln 2+\ln\frac{\eta}{1-\eta}-\ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\ln\left|\frac{b-2}{b-1}\right|-\ln\frac{\eta}{1+\eta}\right)$$

$$=\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \eta\to+0}}\left(\ln\frac{\varepsilon+1}{1-\varepsilon}-\ln 2+\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}\right)$$

$$=-\ln 2=\ln\frac{1}{2},$$

所以

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=\ln\frac{1}{2}.$$

2393. $V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$.

解 由于

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{x\ln x}+\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}[\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln(\ln 2)+\ln(\ln 2)$$
$$-\ln|\ln(1+\varepsilon)|]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\left|\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln(1+\varepsilon)}\right|$$

$$=\ln\left|\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{-1}{1-\varepsilon}}{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right|=\ln 1=0,$$

所以

$$V.P.\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=0.$$

2394. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx.$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big[\operatorname{arc\,tg} b-\operatorname{arc\,tg}(-b)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)$$
$$-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\Big]$$
$$=2\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg} b=\pi,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\pi.$$

2395. $V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg} x\,dx.$

解 由于

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\operatorname{arc\,tg} x\,dx$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\Big[b\operatorname{arc\,tg} b-(-b)\operatorname{arc\,tg}(-b)$$

$$-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln(1+b^2)\Big]=0,$$

所以

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arc\,tg} x\,dx=0.$$

§5. 面积的计算法

1° **直角坐标系中的面积** 由两条连续的曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 〔$y_2(x)\geqslant y_1(x)$〕与 Ox 轴的两条垂线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的面积 $S=A_1A_2B_2B_1$（图4.14）等于

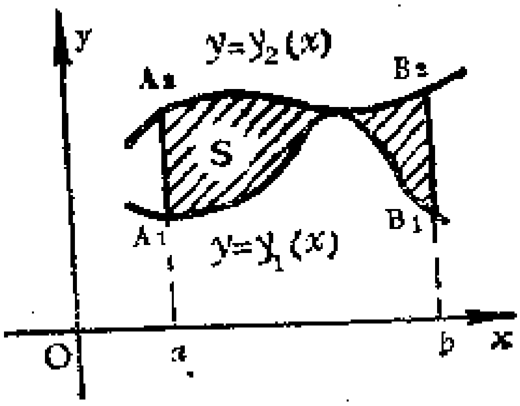

图 4.14

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx.$$

2° **参数形状表出的曲线所围成的面积** 若 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 〔$0\leqslant t\leqslant T$〕为一逐段平滑的简单封闭曲线 C 的参数方程式，面积 S 表由此曲线所围在它左侧的面积（图

4.15），则

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)dt=\int_0^T x(t)y'(t)dt$$

或

$$S=\frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t)-x'(t)y(t)]dt.$$

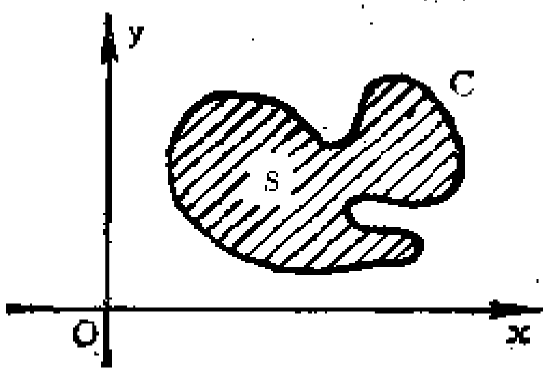

图 4.15

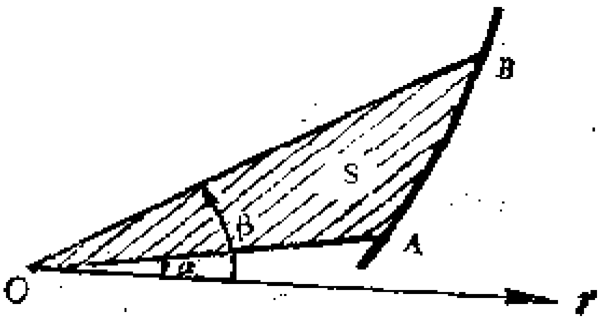

图 4.16

3° **极坐标系中的面积** 由连续的曲线 $r=r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi=\alpha$ 和 $\varphi=\beta$ 所围成的面积 $S=OAB$（图4.16）等于

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi.$$

2396. 证明 正抛物线拱的面积等于

$$S=\frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为底，h 为拱的高（图4.17）.

证 设抛物线的方程为

$y=Ax^2+Bx+C$,

则当 $x=\pm\frac{b}{2}$ 时，得

$$y=\frac{Ab^2}{4}\pm\frac{Bb}{2}+C$$

$$=0;$$

当 $x=0$ 时，得

$$y=C=h.$$

解之得

$$A=-\frac{4h}{b^2},\quad B=0.$$

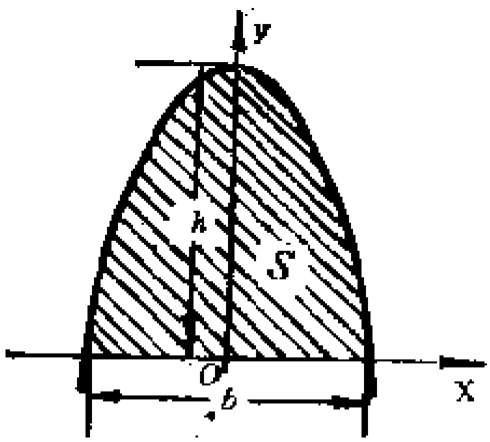

图 4.17

从而

$$y=-\frac{4h}{b^2}x^2+h.$$

于是，所求的面积为

$$S=2\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h-\frac{4h}{b^2}x^2\right)dx$$

$$=2\left(hx-\frac{4h}{3b^2}x^3\right)\Big|_0^{\frac{b}{2}}=\frac{2}{3}bh.$$

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*)。

2397. $ax=y^2$，$ay=x^2$。

解 如图4.18所示，交点为

$$A(a,\ a)\ 及O(0,\ 0).$$

所求的面积为

$$S=\int_0^a\left(\sqrt{ax}-\frac{x^2}{a}\right)dx$$

*) 在第四章的这一节和以后各节都把一切的参数当作是正的。

$$=\left[\frac{2}{3a}(ax)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3a}x^{3}\right]\Bigg|_{0}^{a}=\frac{a^{2}}{3}.$$

2398. $y=x^{2}$, $x+y=2$.

解 如图4.19所示，交点为

$A(-2,\ 4)$ 及$B(1,\ 1)$.

所求的面积为

$$S=\int_{-2}^{1}[(2-x)-x^{2}]dx$$

$$=\left(2x-\frac{x^{2}}{2}-\frac{x^{3}}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=4\frac{1}{2}.$$

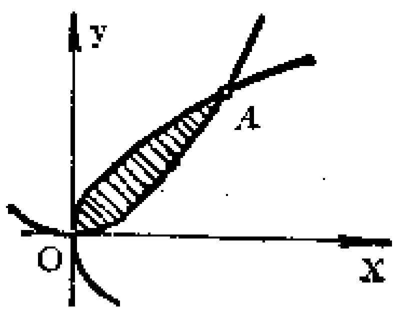

图 4.18

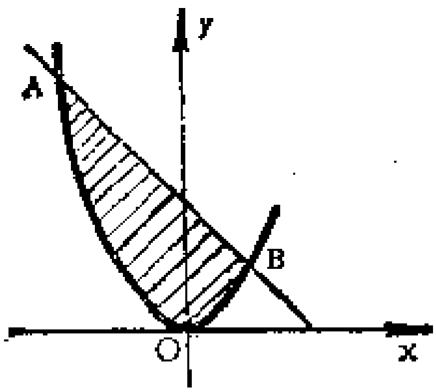

图 4.19

2399. $y=2x-x^{2}$, $x+y=0$.

解 如图4.20所示，交点为

$A(3,\ -3)$ 及$O\ (0,\ 0)$.

所求的面积为

$$S=\int_{0}^{3}[(2x-x^{2})-(-x)]dx$$

$$=\left(\frac{3x^{2}}{2}-\frac{1}{3}x^{3}\right)\Bigg|_{0}^{3}=4\frac{1}{2}.$$

2400. $y=|\lg x|$, $y=0$, $x=0.1$, $x=10$.

解 如图4.21所示，所求的面积为

$$S=-\int_{0.1}^{1}\lg x dx+\int_{1}^{10}\lg x\, dx$$

$$=(-x\lg x+x\lg c)\Big|_{0.1}^{1}$$

$$+(x\lg x-x\lg e)\Big|_{1}^{10}$$

$$=9.9-8.1\lg e\doteq 6.38.$$

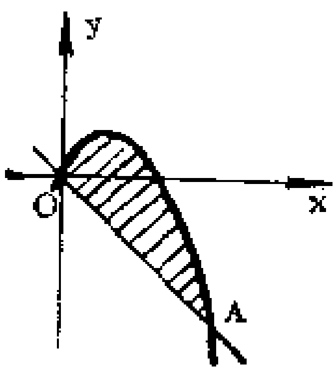

图 4.20

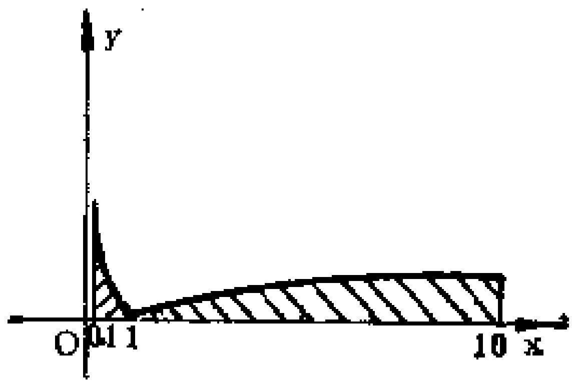

图 4.21

2401. $y=x$, $y=x+\sin^2 x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

解 所求的面积为

$$S=\int_{0}^{\pi}(x+\sin^2 x-x)dx$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{0}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

2402. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$, $y=0$.

解 所求的面积为

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+x^2}\,dx=2a^3\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$=2a^3\cdot\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} b=\pi a^2.$$

2403. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

解 所求的面积为

$$S=4\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{4b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=\pi ab.$$

2404. $y^2=x^2(a^2-x^2)$.

解 如图4.22所示，图形对称于原点。所求的面积为

$$S=4\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{4}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{4}{3}a^3.$$

2405. $y^2=2px$，$27py^2=8(x-p)^3$。

解 曲线 L_1：$27py^2=8(x-p)^3$ 与曲线 L_2：$y^2=2px$ 在第一象限内的交点为

$$A(4p,\ 2\sqrt{2}p),$$

如图4.23所示。所求的面积为

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}p}\left[\left(p+\frac{3}{2}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{2p}y^2\right]dy$$

$$=2\left(py+\frac{9}{10}p^{\frac{1}{3}}y^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6p}y^3\right)\Big|_0^{2\sqrt{2}p}$$

$$=\frac{88}{15}\sqrt{2}\,p^2.$$

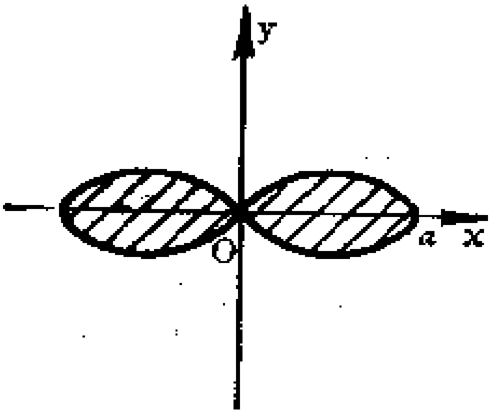

图 4.22

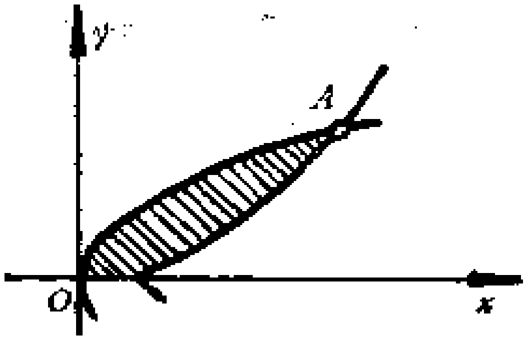

图 4.23

2406. $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1\ (AC-B^2>0)$.

解 解此方程，得

$$y_1=\frac{-Bx-\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C},$$

及

$$y_2=\frac{-Bx+\sqrt{B^2x^2-C(Ax^2-1)}}{C}.$$

当$B^2x^2-C(Ax^2-1)\geqslant0$，即$|x|\leqslant\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}}$时，

y_1及y_2才有实数值.

设

$$a=\sqrt{\frac{C}{AC-B^2}},$$

则所求的面积为

$$S=\int_{-a}^{a}(y_2-y_1)dx$$

$$=\frac{2}{C}\int_{-a}^{a}\sqrt{C^2-(AC-B^2)x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{2}{C}\sqrt{AC-B^2}\cdot\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

2407. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$（蔓叶线），$x=2a$。

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{2a}x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$$

$$=16a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^4}{(t^2+1)^3}dt^{*)}$$

$$=16a^2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{2}{(t^2+1)^2}+\frac{1}{(t^2+1)^3}\right]dt$$

$$=16a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}t-\frac{5t}{8(t^2+1)}+\frac{t}{4(t^2+1)^2}\right\}^{**)}\Bigg|_0^b$$

$=3\pi a^2$.

*) 设 $t=\sqrt{\dfrac{x}{2a-x}}$.

**) 利用1921题的递推公式。

2408. $x=a\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$（曳物线），$y=0$.

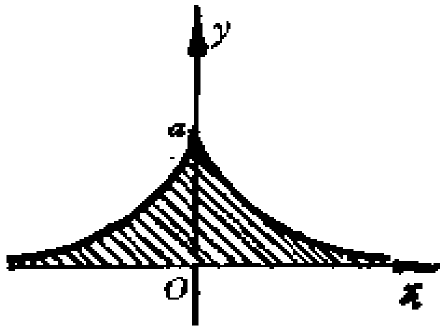

图 4.24

解 如图4.24所示，所求的面积为

$$S=2\int_0^a\left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\right)dy$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}dy-$$

$$-2\left(\frac{y}{2}\sqrt{a^2-y^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=2a\lim_{\varepsilon\to+0}\left(y\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}\right.$$

$$\left.+a\arcsin\frac{y}{a}\right)\Big|_\varepsilon^a-\frac{\pi a^2}{2}$$

$$=\pi a^2-\frac{\pi a^2}{2}=\frac{\pi a^2}{2}.$$

2409. $y^2=\dfrac{x^n}{(1+x^{n+2})^2}$ $(x>0\,;\ n>-2)$.

解 所求的面积为

$$S=2\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}}dx$$

$$=2\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ b\to+\infty}}\int_\varepsilon^b\frac{2}{n+2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}\ ^{*)}$$

$$=2\cdot\frac{2}{n+2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}t\Big|_0^b=\frac{2\pi}{n+2}.$$

*) 设 $t=x^{\frac{n+2}{2}}$。

2410. $y=e^{-x}\sin x$, $y=0$ $(x\geqslant 0)$。

解 令$\sin x=0$，得 $x=k\pi(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$。当 $x\geqslant 0$ 时，由于 $\sin x$ 在$(\pi, 2\pi)$,$(3\pi, 4\pi)$, …, $((2k+1)\pi, 2k\pi)$, …中的值为负，而在 $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$, …, $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, …中的值为正，故所求的面积为

$$S=\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx-\int_\pi^{2\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$+\int_{2\pi}^{3\pi}e^{-x}\sin x\,dx-\cdots+$$

$$+(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx+\cdots$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^k\cdot\frac{-e^{-x}(\sin x+\cos x)}{2}\Bigg|_{k\pi}^{(k+1)\pi}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n(-1)^{k+1}\cdot\frac{1}{2}\Big[e^{-(k+1)\pi}\cos(k+1)\pi$$

$$-e^{-k\pi}\cos k\pi \Big\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\cdot(-1)^{k+1}\left[(-1)^{k+1}e^{-(k+1)\pi}-(-1)^{k}e^{-k\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left[e^{-(k+1)\pi}+e^{-k\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2e^{-\pi}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-k\pi}+e^{-(n+1)\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+2e^{-\pi}\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}+e^{-(n+1)\pi}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2}\doteq 0.545.$$

2411. 抛物线 $y^2=2x$ 分圆 $x^2+y^2=8$ 的面积为两部分，这两部分的比如何？

解 抛物线 $y^2=2px$ 和圆 $x^2+y^2=8$ 在第一象限内的交点为 $A(2,\ 2)$。

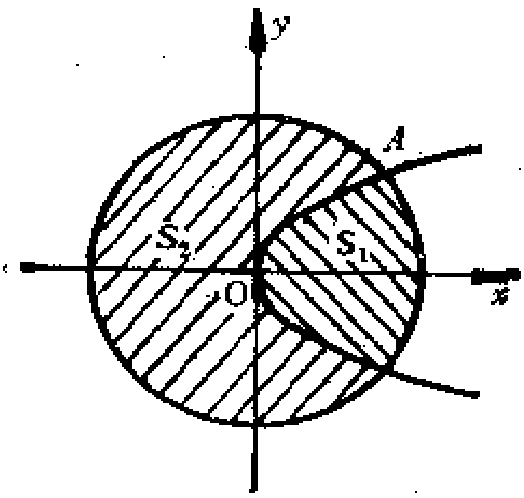

图 4.25

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2（图4.25），则有

$$S_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-y^2}-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$=2\left(\frac{y}{2}\sqrt{8-y^2}+\frac{8}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2=2\pi+\frac{4}{3},$$

及

$$S_2=8\pi-\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)=6\pi-\frac{4}{3}.$$

于是，它们之比为

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi+\frac{4}{3}}{6\pi-\frac{4}{3}}=\frac{3\pi+2}{9\pi-2}.$$

2412. 把双曲线$x^2-y^2=a$上的点$M(x, y)$的坐标表成为双曲线扇形$S=OM'M$面积的函数。这个扇形是由双曲线的弧$M'M$与二射线OM及OM'所围成，其中$M'(x, -y)$是对于Ox轴与M对称的点。

解 如图4.26所示，则有

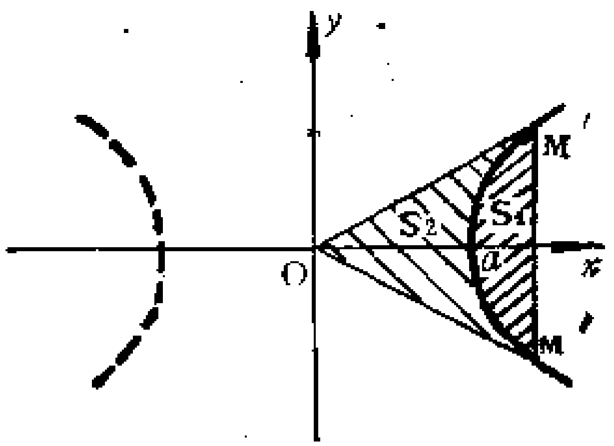

图 4.26

$$\frac{S_1}{2}=\int_a^x \sqrt{x^2-a^2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\right]_a^x$$

$$=\frac{1}{2}xy-\frac{a^2}{2}\ln\frac{x+y}{a}$$

及

$$S_2=2\left(\frac{xy}{2}-\frac{S_1}{2}\right)=a^2\ln\frac{x+y}{a}.$$

若记$S_2=S$，则由上式得

$$x+y=ae^{\frac{S}{a^2}}. \tag{1}$$

以（1）式代入$x^2-y^2=a^2$中，易得

$$x-y=ae^{-\frac{S}{a^2}}. \tag{2}$$

由（1）式及（2）式，解得

$$x=a\cdot\frac{e^{\frac{S}{a^2}}+e^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\,\mathrm{ch}\frac{S}{a^2}$$

及

$$y=a\cdot\frac{e^{\frac{S}{a^2}}-e^{-\frac{S}{a^2}}}{2}=a\,\mathrm{sh}\frac{S}{a^2}.$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积：

2413. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（摆线）及 $y=0$．

解 所求的面积为

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$

$$=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=3\pi a^2.$$

由此可见，所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍。

2414. $x=2t-t^2$，$y=2t^2-t^3$.

解 当 $t=0$ 及 2 时，$x=0$，$y=0$；

当 $0<t<2$ 时，

$x>0$，

$y>0$；

当 $t<0$ 时，

$x<0$，

$y>0$；

当 $t>2$ 时，

$x<0$，

$y<0$.

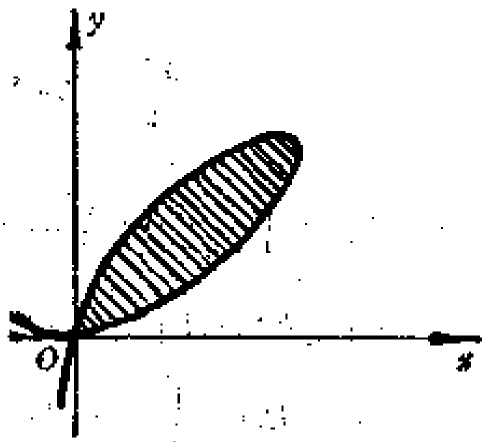

图 4.27

如图4.27所示，所求的面积为

$$S=-\int_0^2 (2t^2-t^3)\cdot 2(1-t)dt$$

$$=-2\int_0^2 (t^4-3t^3+2t^2)dt$$

$$=\frac{8}{15}.$$

2415. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $[0\leqslant t\leqslant 2\pi]$（圆的渐伸线）及 $x=a$, $y\leqslant 0$.

解 所求面积为

$$S=-\int_0^{2\pi} a(\sin t-t\cos t)\cdot at\cos t\,dt-\int_{\overline{AB}} y\,dx$$

$$=a^2\left(\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{4}t^2\sin 2t+\frac{1}{2}t\cos 2t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}-\int_{\overline{AB}} y\,dx$$

$$=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}} y\,dx,$$

其中 $\int_{\overline{AB}} y\,dx$ 表沿着从点 $A(a, -2\pi a)$ 到点 $B(a, 0)$ 的直线 $\overline{AB}$ 上的积分. 由于在 $\overline{AB}$ 上 $x\equiv a$, 故 $dx=0$, 从而 $\int_{\overline{AB}} y\,dx=0$. 于是, 得

$$S=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi).$$

2416. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

解 所求面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy_t'-yx_t')dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a(2\cos t-\cos 2t)\cdot a(2\cos t-2\cos 2t)-a(2\sin t-\sin 2t)\cdot a(-2\sin t+2\sin 2t)]dt$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t)dt$$

$$=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=6\pi a^2$$

2417. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t$ $(c^2=a^2-b^2)$ （椭圆的渐屈线）。

解 如图4.28所示。所求的面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c^2}{b}\sin^3 t\cdot\frac{3c^2}{a}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\frac{12c^4}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt$$

$$=\frac{3\pi c^4}{8ab}.$$

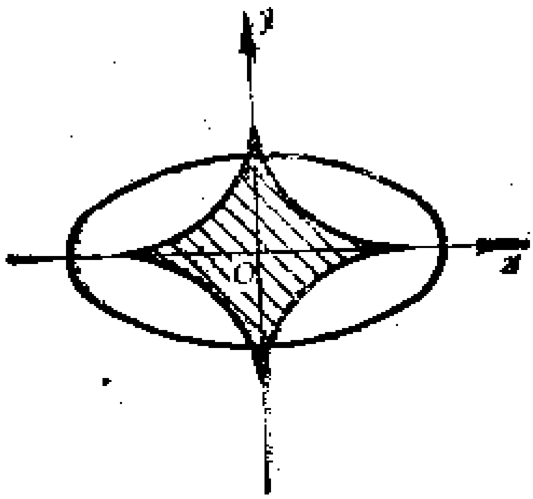

图 4.28

求由下列极坐标方程式所表曲线围成的面积 S：

2418. $r^2=a^2\cos 2\varphi$ （双纽线）。

解 如图4.29所示，所求的面积为

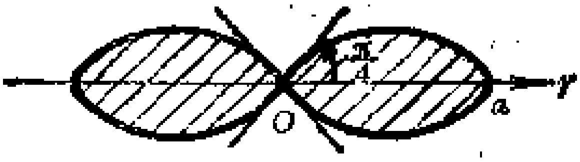

图 4.29

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\varphi\, d\varphi=a^2.$$

2419. $r=a(1+\cos\varphi)$（心脏形线）.

解 如图4.30所示。所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

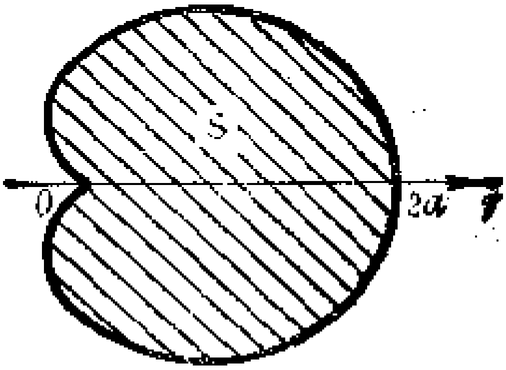

图 4.30

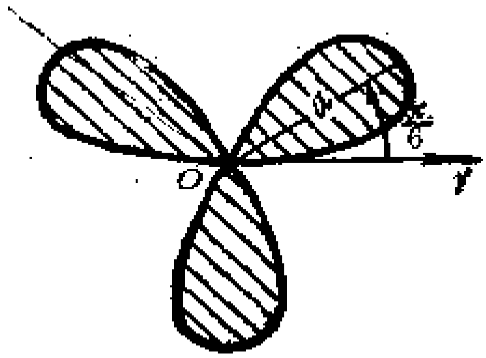

图 4.31

2420. $r=a\sin 3\varphi$（三叶线）

解 如图4.31所示，所求的面积为

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\varphi\, d\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

2421. $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$（抛物线），$\varphi=\frac{\pi}{4}$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$.

解 所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{p^2}{(1-\cos\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^4\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=-\frac{p^2}{4}\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{p^2}{6}(4\sqrt{2}+3)^{*)}.$$

*) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=1+\sqrt{2}$.

2422. $r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ $(0<\varepsilon<1)$（椭圆）.

解 所求的面积为

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{p^2d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$=p^2\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

设

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=t,$$

并记

$$a^2=\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

则有

$$\int\frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}=\int\frac{2(t^2+1)dt}{(1-\varepsilon)^2(t^2+a^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{dt}{t^2+a^2}$$

$$+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

$$=\frac{2}{a(1-\varepsilon)^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}$$

$$+\frac{2(1-a^2)}{(1-\varepsilon)^2}\left\{\frac{t}{2a^2(t^2+a^2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}\right\}^{*)}+C.$$

当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ 时，$0\leqslant t<+\infty$，从而得一广义积分．于是，经计算得

$$S=\left\{\frac{\pi}{a(1-\varepsilon)^2}+\frac{(1-a^2)\pi}{2a^3(1-\varepsilon)^2}\right\}\cdot p^2$$

$$=\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) 利用1921题的递推公式．

2423. $r=a\cos\varphi$，$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)\left(M(\frac{a}{2},\ 0)\in S\right)$.

解 如图4.32所示，

$|OA|=a$，

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$，

阴影部分即为所求的面积．

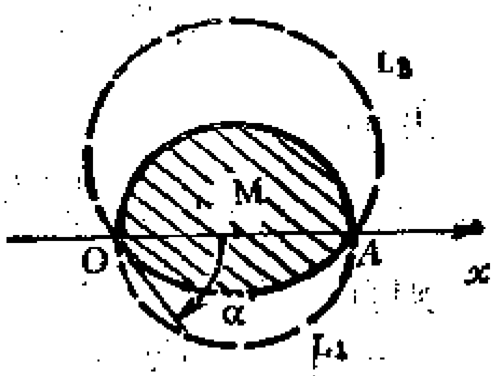

图 4.32

曲线L_1：$r=a\cos\varphi$，

L_2：$r=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$。

所求的面积为

$$S=\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}a^2(\cos\varphi+\sin\varphi)^2d\varphi$$

$$=\frac{a^2(\pi-1)}{4}.$$

2424⁺. 求由曲线$\varphi=r\operatorname{arc\,tg}r$及二射线$\varphi=0$及$\varphi=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$所围成之扇形的面积.

解 当φ由0变到$\frac{\pi}{\sqrt{3}}$，r从0变到$\sqrt{3}$，而

$$d\varphi=\left(\frac{r}{1+r^2}+\operatorname{arc\,tg}r\right)dr.$$

所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}r^2d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{r^3}{1+r^2}+r^2\operatorname{arc\,tg}r\right)dr$$

$$=\left[\frac{1}{6}r^2-\frac{1}{6}\ln(1+r^2)+\frac{1}{6}r^3\operatorname{arc\,tg}r\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

2425. 求封闭曲线

$$r=\frac{2at}{1+t^2},\quad \varphi=\frac{\pi t}{1+t}$$

所包围的面积。

解 当曲线封闭时，t 由 0 变化到 $+\infty$。所求的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 d\varphi=2\pi a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}dt$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{\int_0^b\frac{dt}{4(1+t)^2}-\frac{1}{4}\int_0^b\frac{dt}{1+t^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_0^b\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}\right\}$$

$$=2\pi a^2\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{4(1+t)}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} t\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+t^2}\right\}\Bigg|_0^b$$

$$=\pi a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

变为极坐标，以求下列曲线所围成的面积：

2426. $x^3+y^3=3axy$（笛卡尔叶形线）.

解 $r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)=3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,

于是

$$r=\frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi},$$

当 $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$r\geqslant 0$，且当 $\varphi=0$ 及 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，$r=0$。所以，从$\varphi=0$ 到$\varphi=\frac{\pi}{2}$，叶形线位于第一象限部分所围成的面积，即为所要求的面积（图

4.33)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}\ ^{*)}$$

$$=\frac{9a^2}{2}\lim_{b\to+\infty}\frac{-1}{3(1+t^3)}\Bigg|_0^b$$

$$=\frac{3a^2}{2}.$$

*) 设 $\operatorname{tg}\varphi=t$.

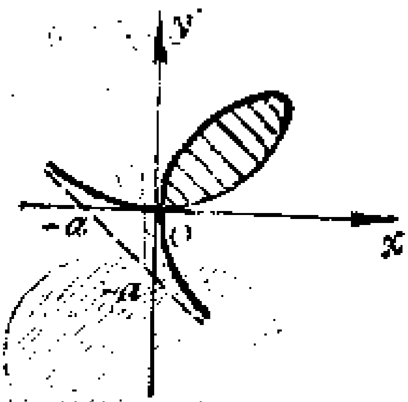

图 4.33

2427. $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解 $r^4(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)=a^2r^2$,

于是

$$r=\frac{\sqrt{2}\,a}{\sqrt{2-\sin^2 2\varphi}}.$$

如图4.34所示，所求的面积为

$$S=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2a^2}{2-\sin^2 2\varphi}d\varphi$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2-\sin^2 t}dt$$

$$=\frac{2a^2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\sin t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sin t}\right)dt$$

$$=\sqrt{2}\,a^2\left\{2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}-1\right)\right.$$

$$+2\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\frac{t}{2}+1\right)\Big\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sqrt{2}a^2\{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1)+\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}+1)\}$$

$$=2\sqrt{2}a^2\cdot\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\pi a^2.$$

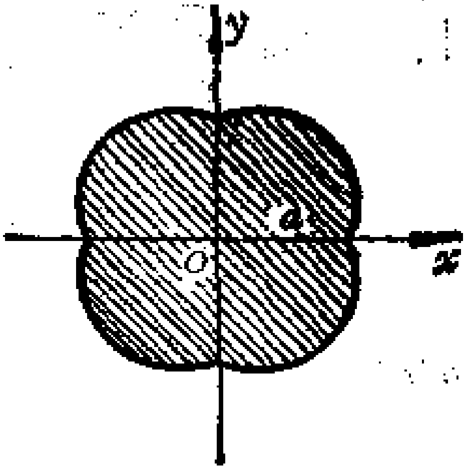

图 4.34

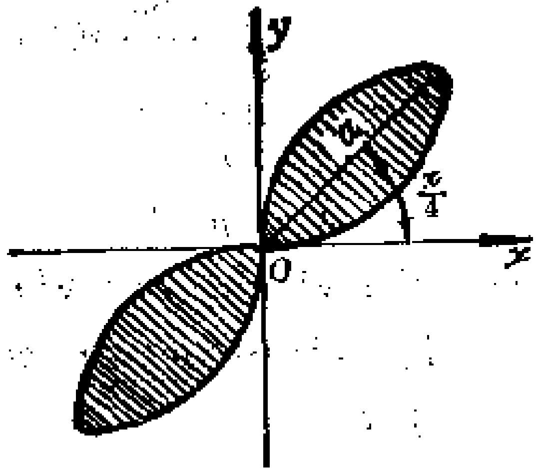

图 4.35

2428. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$（双纽线）.

解 $r^2=a^2\sin 2\varphi$（图4.35）.

所求的面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin 2\varphi=a^2.$$

化方程式为参数式的形状，以求下列曲线所围成的面积：

2429. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）.

解 设

$$x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t,$$

其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$，它对应于四分之一的面积。所求的面积为其四倍，即

$$S = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2\sin^4 t\cos^2 t)dt$$

$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t)dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

2430. $x^4+y^4=ax^2y$.

解 设

$$y=tx,$$

则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{at}{1+t^4}, \\ y=\frac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知，所求的面积为

$$S=-2\int_0^{+\infty}\frac{at^2}{1+t^4}\cdot\frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=-2a^2\left(\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt\right.$$

$$\left.-3\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt\right).$$

因为

$$\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$=\frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b\cdot(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$-\frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)}\int\frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m}dx \quad {}^{*)},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=-\frac{t^3}{5(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=\frac{3}{5}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt,$$

于是

$$S=\frac{8}{5}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt.$$

又因

$$\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m}$$

$$=\frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}}$$

$$+\frac{4m-n-5}{4a(m-1)}\int\frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}}, \quad {}^{**)}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^3}dt$$

$$=\frac{t^3}{8(1+t^4)^2}\Big|_0^{+\infty}+\frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=\frac{5}{8}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt$$

$$=\frac{5}{8}\left[\frac{t^3}{4(1+t^4)}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{1+t^4}\right]$$

$$=\frac{5}{32}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt,$$

于是

$$S=\frac{1}{4}a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt.$$

利用

$$\int\frac{x^2}{a+bx^4}dx$$

$$=\frac{1}{4b\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{x^2-\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2+\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x+\sqrt{\frac{a}{b}}}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}}-x^2}\right\}^{***)}\quad(ab>0),$$

即得

$$\int\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right\}+C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}$ 在$(0,+\infty)$中的 $t=1$ 点间断，并且

$$\lim_{t\to 1+0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}=-\frac{\pi}{2},$$

及

$$\lim_{t\to 1-0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}=\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt=\int_0^1\frac{t^2}{1+t^4}dt+\int_1^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}dt$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}\,t+1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left\{\ln\frac{t^2-\sqrt{2}\,t+1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right.$$

$$\left.+2\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2}\,t}{1-t^2}\right\}\Bigg|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4},$$

最后得所求的面积为

$$S=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{16}a^2.$$

*) 参阅"函数表与积分表"（И.М.雷日克，И.С.格拉德什坦）第64页"(2.133)2"。

**) 参阅同书第64页"(2.133) 1"。

***) 参阅同书第64页"(2.132)3"。

§6. 弧长的计算法

1° 在直角坐标系中的弧长 平滑（连续可微分的）曲线

$$y=y(x) \quad (a\leqslant x\leqslant b)$$

上一段弧的长度等于

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}\,dx.$$

2° 参数方程所表曲线的弧长 若曲线C用参数方程式给出

$$x=x(t),\quad y=y(t) \quad (t_0\leqslant t\leqslant T),$$

式中$x(t)$，$y(t)$为在闭区间$[t_0, T]$内可微分的连续函数，则曲线C的弧长等于

$$s=\int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt.$$

3° 极坐标系中的弧长 若

$$r=r(\varphi) \quad (\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta),$$

式中$r(\varphi)$及其导函数$r'(\varphi)$在闭区间$[\alpha, \beta]$上皆是连续的，则曲线上对应的一段弧长等于

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

关于空间曲线的弧长可参阅第八章。

求下列曲线的弧长：

2431. $y=x^{\frac{3}{2}}(0\leqslant x\leqslant 4)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

2432. $y^2=2px\ (0\leqslant x\leqslant x_0)$.

解 $y'=\frac{p}{y}$, $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p^2}{y^2}}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}.$$

所求的弧长为

$$s=2\int_0^{x_0}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{x}}dx$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{x_0}\sqrt{p+2x}\,d(\sqrt{x})$$

$$=2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{x(p+2x)}\right.$$

$$\left.+\frac{p}{2\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{p}{2}}\right)\right\}\Big|_0^{x_0}$$

$$=2\sqrt{x_0\left(x_0+\frac{p}{2}\right)}$$

$$+p\ln\left(\frac{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0+\frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}}\right).$$

2433. $y=a\,\text{ch}\frac{x}{a}$从点$A(0,a)$至点$B(b,h)$。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^b\sqrt{1+\text{sh}^2\frac{x}{a}}\,dx=\int_0^b\text{ch}\frac{x}{a}\,dx$$

$$=a\,\text{sh}\frac{x}{a}\Big|_0^b=a\,\text{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{h^2-a^2}\,^{*)}.$$

*) 由于$h=a\,\text{ch}\frac{b}{a}$，故$\text{sh}\frac{b}{a}=\sqrt{\text{ch}^2\frac{b}{a}-1}$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{h^2-a^2}.$$

2434. $y=e^x\ (0\leqslant x\leqslant x_0)$。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{x_0}\sqrt{1+e^{2x}}\,dx$$

$$=\left(\sqrt{1+e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right)\Big|_0^{x_0}$$

$$=\sqrt{1+e^{2x_0}}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x_0}}-1}{\sqrt{1+e^{2x_0}}+1}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=x_0-\sqrt{2}+\sqrt{1+e^{2x_0}}$$

$$-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.$$

2435. $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y\ (1\leqslant y\leqslant e)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2}\,dy$$

$$=\int_1^e\frac{1+y^2}{2y}dy=\frac{e^2+1}{4}.$$

2436. $y=a\ln\frac{a^2}{a^2-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant b<a)$.

解 $y'=\frac{2ax}{a^2-x^2}$, $\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^b\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}dx=a\ln\frac{a+b}{a-b}-b.$$

2437. $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}\right)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}\,dx$$

$$=\int_0^a\frac{dx}{\cos x}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right).$$

2438. $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}\ (0<b\leqslant y\leqslant a)$.

解 $\frac{dx}{dy}=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$, $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=\frac{a}{y}$.

所求的弧长为

$$s=\int_b^a \frac{a}{y}dy=a\ln\frac{a}{b}.$$

2439. $y^2=\frac{x^3}{2a-x}\left(0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a\right)^{*)}$.

解 如图4.36所示。

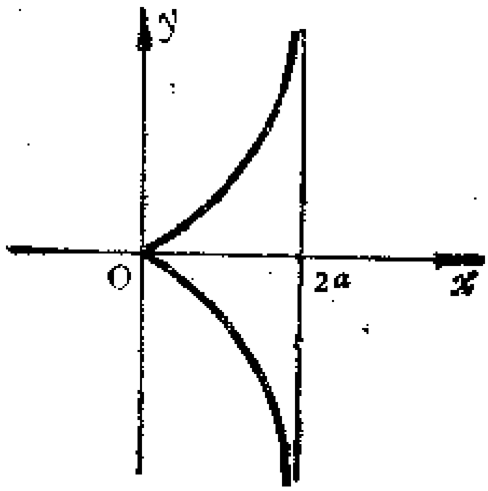

图 4.36

设$y=tx$，得

$$\begin{cases}x=\frac{2at^2}{1+t^2},\\ y=\frac{2at^3}{1+t^2}.\end{cases}$$

当$0\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}a$时，$0\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$（一半弧长）。

$$x_t'=\frac{4at}{(t^2+1)^2},\quad y_t'=\frac{2at^4+6at^2}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{\sqrt{5}}2\frac{2at\sqrt{t^2+4}}{t^2+1}dt$$

$$=32a\cdot\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\cos^2\theta(1+3\sin^2\theta)}\ ^{**)}$$

$$=\frac{32a}{3}\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{dz}{z^2\left(z^2-\frac{4}{3}\right)}\ ^{***)}$$

$$=\frac{32a}{3}\left\{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{3\sqrt{3}}{16}\ln\frac{z-\frac{2}{\sqrt{3}}}{z+\frac{2}{\sqrt{3}}}\right\}\Bigg|_{1}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

$$=4a\left(1+3\sqrt{3}\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

*) 原题误为 $y^2=\frac{x^2}{2a-x}$，现按原答案予以改正。

**) 设 $t=2\operatorname{tg}\theta$。

***) 设 $z=\cos\theta$。

2440. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（内摆线）。

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$\sqrt{1+y'^2}=\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$。

所求的弧长为

$$s=4\int_0^a\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}dx=6a.$$

2441. $x=\frac{c^2}{a}\cos^3t$，$y=\frac{c^2}{b}\sin^3t$，$c^2=a^2-b^2$（椭圆的渐屈线）。

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}$

$$=\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2t+a^2\sin^2t}.$$

所求的弧长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3c^2}{ab}\sin t\cos t\sqrt{b^2\cos^2t+a^2\sin^2t}\,dt$$

$$=\frac{12c^2}{3ab(a^2-b^2)}\left\{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t\right\}^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{4(a^3-b^3)}{ab}.$$

2442⁺. $x=a\cos^4 t,\ y=a\sin^4 t$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4a\sin t\cos t\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\,dt$$

$$=2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\,d\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)$$

$$=2a\left[\frac{\sin^2 t-\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\cos^4 t+\sin^4 t}\right.$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\sin^2 t-\frac{1}{2}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t+\sin^4 t)}\right|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[1+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})\right]a.$$

2443. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a.$$

2444. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$（圆的渐伸线）.

解 $x_t'=at\cos t$, $y_t'=at\sin t$,

$$\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=at.$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}at\,dt=2\pi^2a.$$

2445⁺. $x=a(\operatorname{sh}t-t)$, $y=a(\operatorname{ch}t-1)$ $(0\leqslant t\leqslant T)$.

解 $\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{2}a\cdot\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}$.

所求的弧长为

$$s=\int_0^T\sqrt{2}a\sqrt{\operatorname{ch}^2t-\operatorname{ch}t}\,dt$$

$$=\sqrt{2}a\int_1^{\operatorname{ch}T}\sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}}d\theta \quad ^{*)}$$

$$=2\sqrt{2}a\int_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}\frac{\sin^2z}{\cos^3z}dz \quad ^{**)}$$

$$=2\sqrt{2}a\left\{\frac{\sin z}{2\cos^2z}-\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)\right\}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{ch}T}}$$

$$=\sqrt{2}a(\sqrt{\operatorname{ch}T}\cdot\sqrt{1+\operatorname{ch}T}-\sqrt{2})$$

$$-\sqrt{2}a[\ln(\sqrt{\operatorname{ch}T}+\sqrt{1+\operatorname{ch}T})$$

$$-\ln(1+\sqrt{2})]$$

$$=2a\left(\operatorname{ch}\frac{T}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{ch}T}-1\right)$$

$$-\sqrt{2}\,a\ln\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{T}{2}+\sqrt{\mathrm{ch}\,T}}{\sqrt{2}+1}^{***)}.$$

*) 设$\theta=\mathrm{ch}\,t$。

**) 设$\theta=\mathrm{tg}^2 z$。

***) $\sqrt{1+\mathrm{ch}\,T}=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{T}{2}$。

2446. $r=a\varphi$（阿基米得螺线）（$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$）。

解 所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi$$

$$=a\left\{\frac{\varphi}{2}\sqrt{\varphi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1})\right\}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=a\left\{\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})\right\}.$$

2447. $r=ae^{m\varphi}$（$m>0$）当$0<r<a$。

解 $0<r<a$，$-\infty<\varphi<0$。

所求的弧长为

$$s=\int_{-\infty}^{0}\sqrt{a^2e^{2m\varphi}+a^2m^2e^{2m\varphi}}\,d\varphi$$

$$=a\sqrt{m^2+1}\int_{-\infty}^{0}e^{m\varphi}d\varphi$$

$$=\lim_{\varepsilon\to-\infty}\int_{\varepsilon}^{0}e^{m\varphi}\,d\varphi=\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

2448. $r=a(1+\cos\varphi)$。

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=2a\cos\frac{\varphi}{2}$。

所求的弧长为

$$s=2\int_0^{\pi}2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=8a.$$

2449. $r=\frac{p}{1+\cos\varphi}\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$。

解 $r'=\frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

所求的弧长为

$$s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2p\cos\frac{\varphi}{2}}{(1+\cos\varphi)^2}d\varphi=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec^3\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sec\frac{\varphi}{2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$=p\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right.$$

$$\left.+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\,d\left(\sec\frac{\varphi}{2}\right)\right\}$$

$$=2p\left\{\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{4}\right)+\frac{\sec\frac{\varphi}{2}}{2}\sqrt{\sec^2\frac{\varphi}{2}-1}\right.$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\sec\frac{\varphi}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\Big\}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=p\{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\}.$$

2450. $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2+r'^2}=a\sin^2\frac{\varphi}{3}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi)$ (图4.37).

所求的弧长为

$$s=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi$$

$$=\frac{3\pi a}{2}.$$

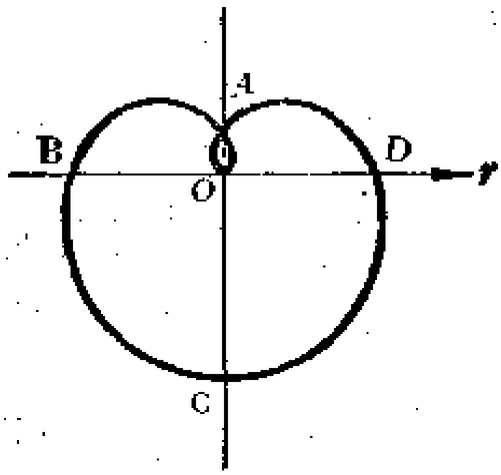

图 4.37

我们甚至可以证明

1° 弧$\overset{\frown}{AB}$为弧$\overset{\frown}{OABC}$的三分之一;

2° $\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$之间依次是等差的，其公差为$\frac{3a}{8}\sqrt{3}$.

不仅如此，我们还可证明更一般的情况：

曲线 $r=a\sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right)$ (n为正整数）之全长为

$$s=\begin{cases}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}4ka, & \text{当}n=2k\text{时},\\ \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!}\pi a, & \text{当}n=2k+1\text{时}.\end{cases}$$

2451. $r=a\,\text{th}\frac{\varphi}{2}\ (0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$.

解 $r'=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}$,

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{a}{2\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{4\text{sh}^2\frac{\varphi}{2}\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}+1}$$

$$=\frac{a}{2\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\sqrt{\text{sh}^2\varphi+1}$$

$$=\frac{a\,\text{ch}\varphi}{2\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{a\,\text{ch}\,\varphi}{1+\text{ch}\,\varphi}$$

$$=a\left(1-\frac{1}{1+\text{ch}\varphi}\right)$$

$$=a\left(1-\frac{1}{2\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right).$$

所求的弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}a\left(1-\frac{1}{2\text{ch}^2\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi=a\left(\varphi-\text{th}\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$=a(2\pi-\text{th}\,\pi).$$

2452. $\varphi=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\ (1\leqslant r\leqslant3)$.

解 $r^2-2r\varphi+1=0$，两边对φ求导函数，得

$$2rr'-2\varphi r'-2r=0$$

即

$$r'=\frac{r}{r-\varphi},$$

从而

$$\sqrt{r^2+r'^2}=\frac{r\varphi}{r-\varphi}=\frac{r^3+r}{r^2-1},$$

$$d\varphi=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)dr.$$

所求的弧长为

$$s=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{r^3+r}{r^2-1}\cdot\frac{r^2-1}{r^2}dr$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3\left(r+\frac{1}{r}\right)dr=2+\frac{1}{2}\ln 3.$$

2453. 证明：椭圆

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$$

的弧长等于正弦曲线$y=c\sin\frac{x}{b}$的一波之长，其中$c=\sqrt{a^2-b^2}$。

证 对于椭圆，其全长为

$$s_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

对于正弦曲线，其一波（x由0到$2\pi b$）之长为

$$s_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{b^2+c^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-c^2\sin^2 t}\,dt$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt.$$

所以$s_1=s_2$，本题得证。

2454. 抛物线$4ay=x^2$沿Ox轴滚动。证明抛物线的焦点划成悬链线。

解 如图4.38所示，设抛物线切Ox轴于点$A(s,0)$，O'为抛物线的顶点，P'为焦点，$O'Y'$为对称轴，$O'X'\perp O'Y'$.过A作$AB\perp O'X'$.

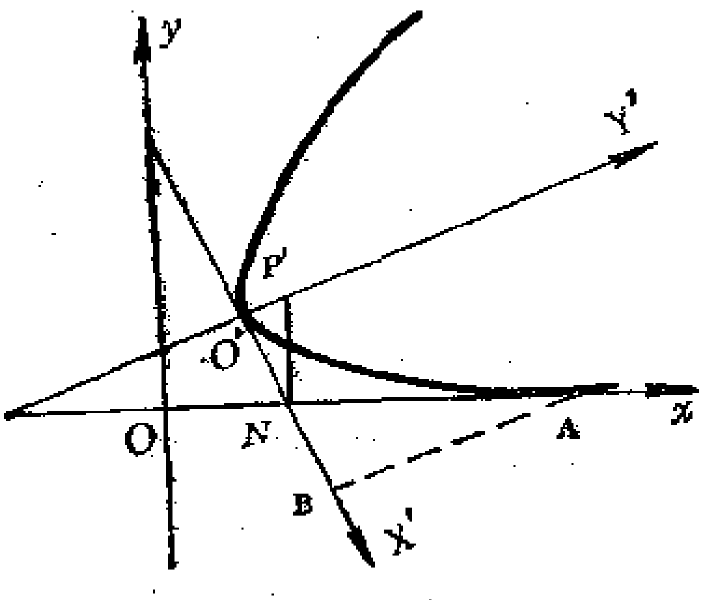

图 4.38

引入参数$O'N=t$，则由抛物线的性质易知：$P'N\perp Ox$，$O'B=2O'N=2t$。从而有

$$AB=\frac{(2t)^2}{4a}=\frac{t^2}{a},\quad AN=t\cdot\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}},$$

$$s=\int_0^{2t}\sqrt{1+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\,dx$$

$$=t\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}+a\ln\left(\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}\right),$$

$$P'N=a\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是，焦点P'的坐标x，y由参数t表出：

$$\begin{cases} x=s-AN=a\ln\left(\dfrac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}\right), & (1)\\ y=P'N=a\sqrt{1+\left(\dfrac{t}{a}\right)^2}. & (2)\end{cases}$$

由（1）式得

$$e^{\frac{x}{a}}=\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}}=-\frac{t}{a}+\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加，得

$$e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}=2\sqrt{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

再以（2）式代入上式，最后得

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

这说明抛物线的焦点划成悬链线。

2455. 求环线

$$y=\pm\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的围线长的圆面积之比。

解 当$x=0$及$x=\frac{1}{3}$时，$y=0$.此环线的面积为

$$S_1=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\sqrt{x}\,dx=\frac{8}{135\sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$s=2\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

按题设有$\frac{4}{3\sqrt{3}}=2\pi R$，所以$R=\frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面积

$$S_2=\pi R^2=\frac{4}{27\pi}.$$

于是，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{2\pi}{5\sqrt{3}}\doteq 0.73.$$

§7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积　若物体的体积 V 存在及 $S=S(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 为用平面切下的物体的横断面积，而此横断面为经过 x 点垂直于 Ox 轴者，则

$$V=\int_a^b S(x)dx.$$

2° 旋转体的体积　面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数，绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_x=\pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

更普遍的情形：面积

$$a\leqslant x\leqslant b;\quad y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负的连续函数，绕 Ox 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V=\pi\int_a^b[y_2^2(x)-y_1^2(x)]dx.$$

2456. 求顶楼的体积，其底是边长等于 a 及 b 的矩形，其顶的棱边等于 c，而高等于 h.

解　如图4.39所示的顶楼，取 x 轴向下，则有

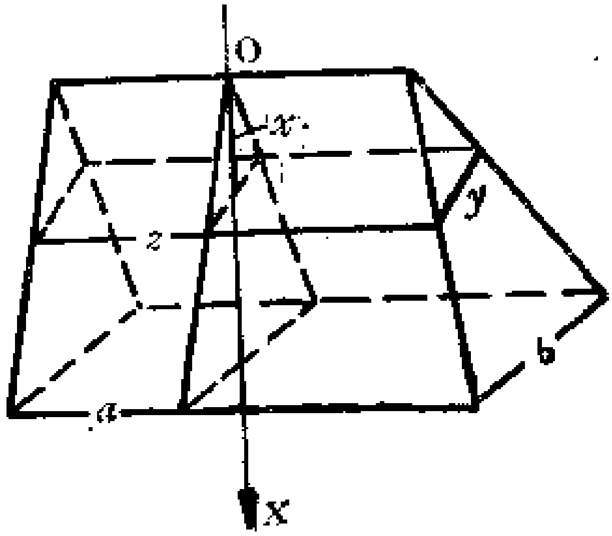

图 4.39

$$\frac{y}{b}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad y=\frac{b}{h}x,$$

$$\frac{z-c}{a-c}=\frac{x}{h} \quad 或 \quad z=\frac{a-c}{h}x+c。$$

于是，所求顶楼的体积为

$$V=\int_0^h yz\,dx=\int_0^h \frac{b}{h}x\left(\frac{a-c}{h}x+c\right)dx$$

$$=\frac{b}{h}\cdot\frac{a-c}{h}\cdot\frac{1}{3}h^3+\frac{bc}{h}\cdot\frac{1}{2}h^2$$

$$=\frac{bh}{6}(2a+c)。$$

2457. 求截楔形的体积，其平行的上下底为边长分别等于 A，B和a，b的矩形，而高等于h。

解 如图4.40所示，

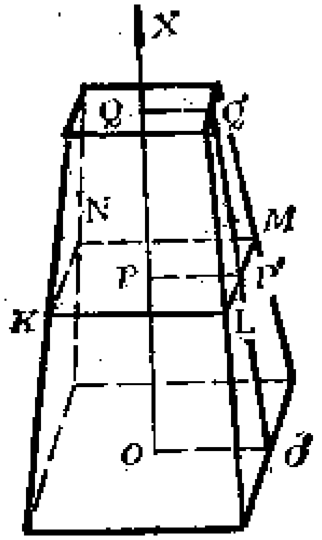

图 4.40

$$OO'=\frac{A}{2},$$

$$QQ'=\frac{a}{2},$$

$$OQ=h.$$

设$OP=x$，则

$$PP'=\frac{a}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{A-a}{2}\right).$$

同样可得

$$LP'=\frac{b}{2}+\frac{h-x}{h}\left(\frac{B-b}{2}\right).$$

从而

$$\text{面积}KLMN=ab+(A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2$$

$$+[a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)$$

$$=f(x).$$

所求截楔形的体积为

$$V=\int_0^h f(x)dx=\frac{h}{6}[(2A+a)B+(2a+A)b].$$

2458. 求截锥体的体积，其上下底为半轴长分别等于A，B和a，b的椭圆，而高等于h.

解 同2457题，任一平行于上下底且距离下底为x的截面为一椭圆，其半轴分别为

$$a' = a + \left(1-\frac{x}{h}\right)(A-a)$$

及

$$b' = b + \left(1-\frac{x}{h}\right)(B-b),$$

从而此截面的面积为

$$S(x) = \pi a' b'$$

$$= \pi \left\{ab + (A-a)(B-b)\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\right.$$

$$\left. + [a(B-b)+b(A-a)]\left(1-\frac{x}{h}\right)\right\}.$$

所求的体积为

$$V = \int_0^h S(x)dx = \frac{\pi h}{6}[(2A+a)B+(A+2a)b].$$

2459. 求旋转抛物体的体积，其底为 S，而高等于 H。

解 不失一般性，假设抛物线方程为

$$y^2 = 2px,$$

绕 Ox 轴旋转，如图4.41所示。

记 $OA = H$，

$OB = x$，按假设有

$$S = \pi \cdot \overline{AC}^2$$

$$= \pi(2pH)$$

$$= 2\pi pH,$$

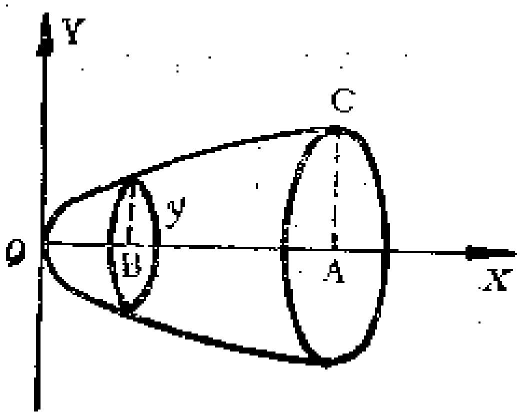

图 4.41

距原点为 x 的截面面积为

$$S(x)=\pi y^2=2\pi px.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_0^H S(x)dx=\pi pH^2=\frac{SH}{2}.$$

2460．设立体之垂直于Ox轴的横截面的面积$S=S(x)$，依下面的二次式规律变化：

$$S(x)=Ax^2+Bx+C \quad [a\leqslant x\leqslant b],$$

其中A，B及C为常数。

证明此物体之体积等于

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

其中$H=b-a$　（辛普森公式）。

证　$V=\int_a^b(Ax^2+Bx+C)\,dx$

$$=\frac{A}{3}(b^3-a^3)+\frac{B}{2}(b^2-a^2)+C(b-a)$$

$$=\frac{b-a}{6}[2A(b^2+ab+a^2)+3B(a+b)+6c]$$

$$=\frac{H}{6}[(Aa^2+Ba+C)+(Ab^2+Bb+C)$$

$$+A(a^2+2ab+b^2)+2B(a+b)+4C]$$

$$=\frac{H}{6}\left[S(a)+S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

2461．物体是点$M(x,y,z)$的集合，其中$0\leqslant z\leqslant 1$，而且若z为有理数时，$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$；若z为

无理数时，$-1\leqslant x\leqslant 0$，$-1\leqslant y\leqslant 0$。证明虽然对应的积分为

$$\int_0^1 S(z)\,dz=1,$$

但此物体的体积不存在。

证 显然，对任何$0\leqslant z\leqslant 1$，不论z是有理数还是无理数，都有$S(z)=1$。从而

$$\int_0^1 S(z)\,dz=\int_0^1 dz=1.$$

下证此物体(V)的体积不存在。显然，无完全含于(V)内的多面体(X)存在，从而这种(X)的体积的上确界为零，即(V)的内体积$V_*=\sup\{X\}=0$。另一方面，(V)的外体积$V^*=\inf\{Y\}$，其中的下确界是对所有完全包含着(V)的多面体(Y)的体积Y来取的。由于$0\leqslant z\leqslant 1$中的有理数和无理数都在$0\leqslant z\leqslant 1$中是稠密的，故，显然，上述任何完全包含着(V)的多面体(Y)都必完全包含着点集$(Y_0)=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1;\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1$，以及$-1\leqslant x\leqslant 0,\ -1\leqslant y\leqslant 0\}$。而$(Y_0)$又完全包含着$(V)$，并且$(Y_0)$的体积$Y_0=2$。由此可知$V^*=\inf\{Y\}=2$。于是$V_*\neq V^*$。故$(V)$的体积不存在。

求下列曲面所围成的体积：

2462. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$z=\dfrac{c}{a}x$，$z=0$。

解 如图4.42所示。用垂直Oy轴的平面截割，得一

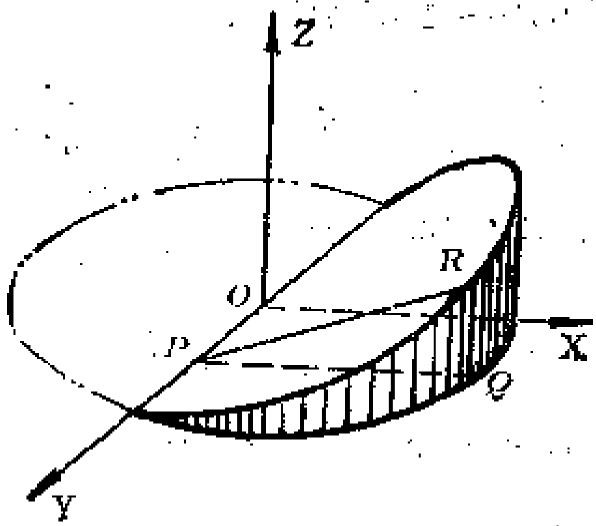

图 4.42

直角三角形PQR。

设$OP=y$，则高 $QR=\frac{c}{a}x$，从而它的面积为

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{a}x^2=\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是，所求体积为

$$V=2\int_0^b\frac{ac}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\frac{2}{3}abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ （椭球）.

解 用垂直于Ox轴的平面截椭球得截痕为一椭圆，它在yoz平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

由此显见其半轴分别为

$$b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \quad 及 \quad c\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},$$

从而此椭圆的面积为

$$S(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

于是，所求的椭球的体积为

$$V=\int_{-a}^{a} S(x)dx=\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\pi bc\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

2464. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $z=\pm c$.

解 方程的图形为单叶双曲面，用平面 $z=h$ 截得椭圆

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

其面积为

$$S(x)=\pi ab\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right).$$

于是，所求的体积为

$$V=\pi ab\int_{-c}^{c}\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)dh=\frac{8}{3}\pi abc.$$

2465. $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$.

解 如图4.43所示，过点 $M(0, 0, z)$ 垂直于Oz轴作一平面，在所给立体上截出一正方形，其边长为$\sqrt{a^2-z^2}$，所以其面积为

$$S(z)=a^2-z^2,$$

于是，所求的体积为

$$V=8\int_0^a(a^2-z^2)\,dz=\frac{16}{3}a^3.$$

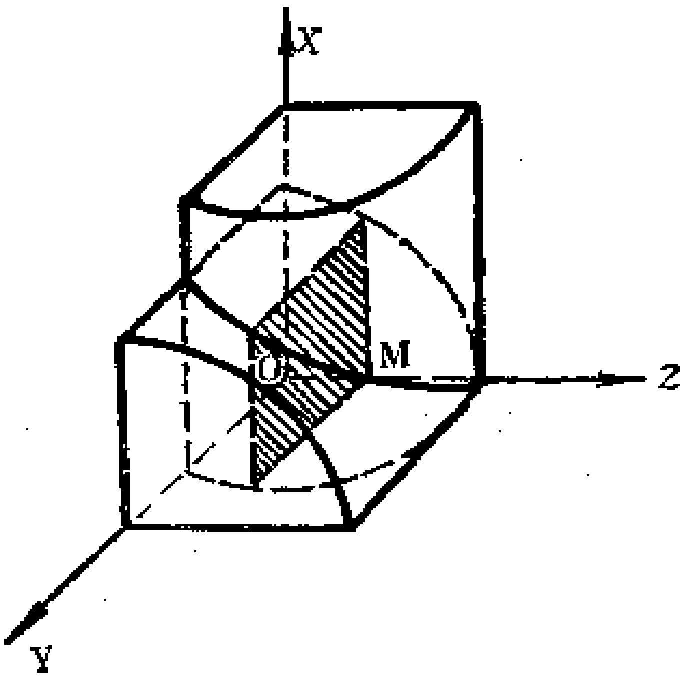

图 4.43

2466. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$.

解 如图4.44所示，过点$M(x, 0, 0)$垂直于 Ox 轴作一平面，在所给立体上截出一曲边梯形，其曲边由方程

$$z=\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}$$

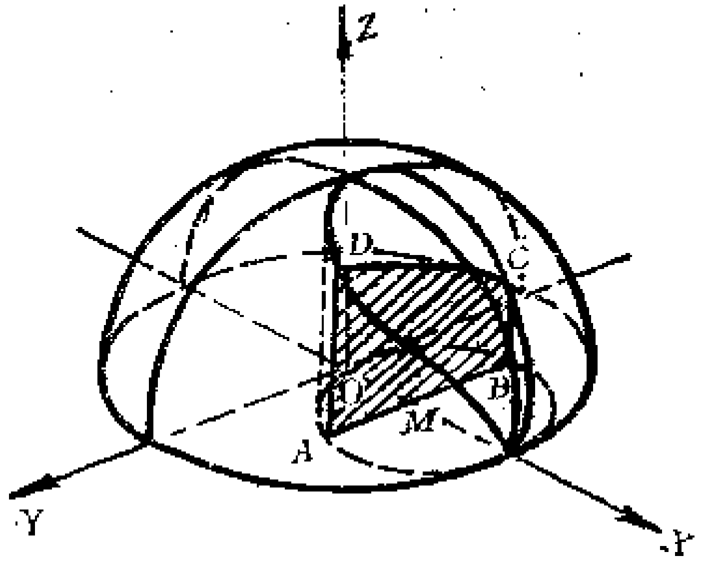

图 4.44

给出（上半面），

其变化范围为：

$-\sqrt{ax-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{ax-x^2}$（如图中$ABCD$）。

从而其截面积为

$$S(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,dy$$

$$=a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.$$

于是，所求的体积为

$$V=2\int_0^a S(x)dx$$

$$=2\int_0^a\left\{a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right.$$

$$\left.+(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\right\}dx$$

$$= 4\left\{\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{5}a^3 + \left[\left(\frac{\pi a^3}{4} - \frac{1}{2}a^3\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{12}\pi a^3 - \frac{13}{90}a^3\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

2467. $z^2 = b(a-x)$, $x^2 + y^2 = ax$.

解 先求体积的四分之一部分，截面积为

$$S(x) = \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{b(a-x)}\, dy$$

$$= \sqrt{ax-x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}.$$

从而

$$\frac{1}{4}V = \int_0^a S(x)\,dx = \int_0^a \sqrt{ax-x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}\,dx$$

$$= \sqrt{b}\int_0^a \sqrt{x}(a-x)\,dx$$

$$= \frac{4}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

于是，所求的体积为

$$V = \frac{16}{15}a^2\sqrt{ab}.$$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1\ (0 < z < a)$.

解 固定 z，则截面为一椭圆，其面积为

$$P(z) = \pi a z.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_0^a P(z)\,dz=\pi a\int_0^a z\,dz=\frac{\pi a^3}{2}.$$

2469+. $x+y+z^2=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$。

解 固定 z，则截面为一直角三角形，其面积为

$$P(z)=\frac{1}{2}(1-z^2)^2.$$

故所求体积

$$V=\int_0^1 \frac{1}{2}(1-z^2)^2 dz$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-2z^2+z^4)\,dz=\frac{4}{15}.$$

注意，曲面 $x+y+z^2=1$ 关于平面 $z=0$ 对称，故它与三个平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 围成的图形有两个，一个位于 Oxy 平面之上，一个位于 Oxy 平面之下，彼此是对称的（关于 Oxy 平面），从而它们的体积相等。我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积。

2470. $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx=a^2$。

解 不妨设 $a>0$。此为一有心椭球面。固定 z，得在平面 xoy 上的投影为

$$x^2+xy+y^2+zx+zy+(z^2-a^2)=0,$$

此截面的面积为

$$S(z)=-\frac{\pi\Delta}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}{}^{*)}=-\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2-a^2 \end{vmatrix}=\frac{2z^2-3a^2}{4},$$

所以

$$S(z)=\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为适合下述不等式的集合：

$$2z^2-3a^2\leqslant 0,$$

即

$$|z|\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是，所求的体积为

$$V=\int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}^{\sqrt{\frac{3}{2}}|a|}\frac{2(3a^2-2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}dz=\frac{4\sqrt{2}\pi}{3}a^3.$$

*) 此公式详见Γ.M 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第330目 7.

2471. 证明：将面积

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad 0\leqslant y\leqslant y(x),$$

（式中 $y(x)$ 为连续函数）绕 Oy 轴旋转所成的旋转体体积等于

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)\cdot dx.$$

证 $\Delta V_y=\pi[(x+\Delta x)^2-x^2]y(x)$

$\doteq 2\pi xy(x)\Delta x$。

于是，所求的体积为

$$V_y=2\pi\int_a^b xy(x)dx.$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积：

2472. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$绕$Ox$轴（半三次抛物线）。

解 所求的体积为

$$V_x=\pi b^2\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}}dx=\frac{3}{7}\pi ab^2.$$

2473. $y=2x-x^2$，$y=0$：(a)绕Ox轴；(б)绕Oy轴。

解 令 $y=0$ 得 $x=0$ 或 $x=2$。

于是，所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\frac{16\pi}{15}$；

(б) $V_y=2\pi\int_0^2 x(2x-x^2)dx=\frac{8\pi}{3}$。

2474. $y=\sin x$，$y=0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$：(a) 绕 Ox 轴；(б) 绕Oy轴。

解 所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^\pi\sin^2 x dx=\frac{\pi^2}{2}$；

(б) $V_y=2\pi\int_0^\pi x\sin x\, dx=2\pi^2$。

2475. $y=b\left(\frac{x}{a}\right)^2$; $y=b\left|\frac{x}{a}\right|$:(a)绕$Ox$轴;(б)绕$Oy$轴。

解 交点为(a, b)及$(-a, b)$。

所求的体积为

(a) $V_x=2\pi\int_0^a\left(b^2\frac{x^2}{a^2}-b^2\frac{x^4}{a^4}\right)dx$

$=\frac{4\pi}{15}ab^2$;

(б) $V_y=\pi\int_0^b\left(\frac{a^2y}{b}-\frac{a^2y^2}{b^2}\right)dy$

$=\frac{\pi a^2b}{6}$。

2476. $y=e^{-x}$, $y=0$ $(0\leqslant x<+\infty)$; (a) 绕Ox轴;
(б) 绕Oy轴。

解 所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx=\frac{\pi}{2}$;

(б) $V_y=\pi\int_0^1(-\ln y)^2dy=2\pi$。

2477. $x^2+(y-b)^2=a^2$ $(0<a\leqslant b)$绕Ox轴。

解 $y_1=b+\sqrt{a^2-x^2}$, $y_2=b-\sqrt{a^2-x^2}$

$(-a\leqslant x\leqslant a)$。

所求的体积为

$V_x=\pi\int_{-a}^{a}(y_1^2-y_2^2)dx$

$$=8b\pi\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=2\pi^2a^2b.$$

2478. $x^2-xy+y^2=a^2$ 绕 Ox 轴.

解 原方程即 $y^2-xy+x^2-a^2=0$，从而

$$y=\frac{x\pm\sqrt{4a^2-3x^2}}{2},$$

函数的定义域为 $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a,\ \frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 Ox 轴的交点分别为 $x=-a$ 与 $x=a$.

于是，所求的体积为

$$V_x=2\left\{\pi\int_0^a\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2dx\right.$$

$$+\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\left[\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}\left(x-\sqrt{4a^2-3x^2}\right)^2\right]dx\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^a\left(4a^2-2x^2+2x\sqrt{4a^2-3x^2}\right)dx$$

$$+2\pi\int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}x\sqrt{4a^2-3x^2}\,dx$$

$$=\pi\left[2a^3-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{9}\left(4a^2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right.$$

$$\left.-\frac{2}{9}\left(4a^2-3x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a}\right]=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

2479. $y=e^{-x}\sqrt{\sin x}$ $(0\leqslant x<+\infty)$绕Ox轴.

解 函数定义域为$[2n\pi, (2n+1)\pi]$, $(n=0, 1, 2, \cdots)$.故所求的体积为

$$V_x=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}e^{-2x}\sin x\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{5}e^{-2x}(-2\sin x-\cos x)\Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}(e^{-2\pi}+1)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-4n\pi}$$

$$=\frac{\pi}{5}\cdot\frac{e^{-2\pi}+1}{1-e^{-4\pi}}=\frac{\pi}{5(1-e^{-2\pi})}.$$

2480. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, $y=0$:

(a) 绕Ox轴; (б) 绕Oy轴; (в) 绕直线$y=2a$.

解 所求的体积为

(a) $V_x=\pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=5\pi^2a^3$;

(б) $V_y=2\pi\int_0^{2\pi}a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2dt$

$=6\pi^3a^3$;

(в) 作平移: $y=\overline{y}+2a$, $x=\overline{x}$,则曲线方程为

$\overline{x}=a(t-\sin t)$, $\overline{y}=-a(1+\cos t)$, 及

$\overline{y}=-2a$.

于是,所求的体积为

$$V_x=\pi\int_0^{2\pi}[4a^2-a^2(1+\cos t)^2]a(1-\cos t)dt$$
$$=7\pi^2a^3.$$

2481. $x=a\sin^3 t$ ， $y=b\cos^3 t$ ($0\leqslant t\leqslant 2\pi$)；

(a) 绕Ox 轴； (б) 绕Oy 轴。

解 所求的体积为

$$\text{(a)}\ V_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(b^2\cos^6 t)(3a\sin^2 t\cos t)dt$$

$$=6\pi ab^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t\,dt\right)$$

$$=6\pi ab^2\left(\frac{6!!}{7!!}-\frac{8!!}{9!!}\right)^{*)}$$

$$=\frac{32}{105}\pi ab^2;$$

(б) 利用对称性，只须将上述答案中 a，b 对调即得

$$V_y=\frac{32}{105}\pi a^2 b.$$

*) 利用2282题的结果。

2482. 证明把面积

$$0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$$

（φ与r为极坐标）绕极轴旋转所成的体积等于

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

证 证法一：

微面积$dS=rd\varphi dr$绕极轴旋转所得微环形体积

$$dV=2\pi r\sin\varphi dS=2\pi r^2\sin\varphi d\varphi dr.$$

于是，所求的体积

$$V=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\sin\varphi\,d\varphi\int_{0}^{r(\varphi)}r^2dr$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

证法二：

应用直角坐标系下的古尔金第二定理*)来证明。对于微小面积元，它的重心可以看成在点$\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi,\ \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$处（图4·45）。

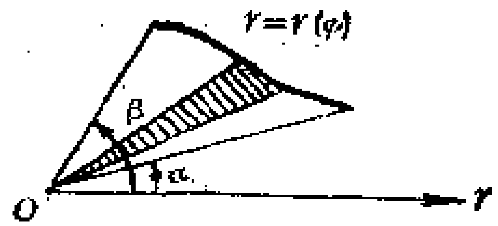

图 4.45

于是面积元素$dS=\frac{1}{2}r^2d\varphi$，其所对应的绕极轴旋转所成的体积元素为

$$dV=2\pi\frac{2}{3}r\sin\varphi\cdot\frac{1}{2}r^2d\varphi.$$

所以

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

*) 参看2506题。

求下列由极坐标所表出的面积经旋转后所得的体积：

2483. $r=a(1+\cos\varphi)(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$:

(a) 绕极轴; (б) 绕直线 $r\cos\varphi=-\frac{a}{4}$.

解 (a) $V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi d\varphi$

$=\frac{8\pi a^3}{3}$;

(б) 方法一:

所求的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_0^{\pi}r^2\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi+\frac{a}{4}\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi$$

$$+\frac{\pi a^3}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi$$

$$+\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi+\frac{\pi^2a^3}{2}$$

$$=\left(4\pi a^3+\frac{\pi a^3}{2}\right)\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\pi+\frac{\pi^2a^3}{2}$$

$$=\frac{13}{4}\pi^2a^3.$$

注 (1)在V的表达式中$\frac{2}{3}r\cos\varphi$的系数$\frac{2}{3}$是把微小

面积集中在其重心$\left(\frac{2}{3}r,\ \varphi\right)$处得出的。

(2) $\int_0^{\pi} \cos^{2k+1}\varphi d\varphi = 0$,

$$\int_0^{\pi} \cos^{2k}\varphi\ d\varphi = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\pi.$$

方法二：

心脏线 $r=a(1+\cos\varphi)$的面积为$\frac{3\pi a^2}{2}$ *)，而其重心为 $\varphi_0=0$，$r_0=\frac{5}{6}a$**)．根据古尔金第二定理可得所求的体积为

$$V = 2\pi\left(\frac{5a}{6}+\frac{a}{4}\right)\frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4}\pi^2 a^3.$$

*) 利用2419题的结果。

**) 利用2512题的结果。

2484. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$;

(a) 绕Ox轴；(б) 绕Oy轴；(в) 绕直线$y=x$。

解 (a) 曲线的极坐标方程为

$$r^2=a^2(2\cos^2\varphi-1).$$

$$V_x = 2\cdot\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2\varphi-1)]^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi.$$

由于

$$\int (2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi d\varphi$$

$$=\int[(\sqrt{2}\cos\varphi)^2-1]^{\frac{3}{2}}d(\sqrt{2}\cos\varphi)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi\right.$$

$$-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})+C.$$

所以

$$V_x=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8}(4\cos^2\varphi\right.$$

$$-5)\sqrt{2\cos^2\varphi-1}+\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}\cos\varphi$$

$$\left.+\sqrt{2\cos^2\varphi-1})\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left[\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{\sqrt{2}}{8}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\pi a^3\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right].$$

(6) 利用对称性知，所求的体积为

$$V_y=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^3\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

令 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$，则$\sqrt{\cos 2\varphi}=\cos x$，

$\cos\varphi\, d\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\, dx$，并且 x 的变化范围为 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$。于是，得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.$$

(в) 利用对称性知所求的体积为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3\sin\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3 2\varphi}\cos\varphi d\varphi.$$

若用本题（б）的变换，即得

$$V=\frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^4 x\, dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\, dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

2485. 求绕极轴把面积

$$a\leqslant r\leqslant a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

旋转而成的旋转体体积.

解 $r=a$ 与 $r=a\sqrt{2\sin 2\varphi}$，在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha=\frac{\pi}{12}$ 及 $\beta=\frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知，所求的体积应为

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}[(a\sqrt{2\sin 2\varphi})^3-a^3]\sin\varphi d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(4\sqrt{2}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$-\sin\varphi)d\varphi.$$

为求上述积分，令

$$I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$I_2=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi,$$

则 $I_2-I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}I_1$

即

$$I_2-\frac{5}{3}I_1=\frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \qquad (1)$$

又

$$I_2+I_1=\int\sqrt{\sin 2\varphi}\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\sqrt{2}\int\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}\sqrt{\operatorname{ctg}\varphi}\,d\varphi.$$

令 $\operatorname{tg}\varphi=t$，就可将上述积分化成二项式的微分的积分。积分之，得

$$I_2+I_1=\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)].\qquad(2)$$

(2)−(1)，得

$$I_1=\frac{3}{8}\Big\{\frac{1}{2}\sin\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}+\frac{1}{2}\ln(\sin\varphi+\cos\varphi-\sqrt{\sin 2\varphi})+\frac{1}{4}[\ln(\sin\varphi+\cos\varphi+\sqrt{\sin 2\varphi})+\arcsin(\sin\varphi-\cos\varphi)]-\frac{1}{3}\cos\varphi\cdot(\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\Big\}+C.$$

从而，得

$$\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sqrt{\sin 2\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{64}\pi.$$

因此，所求的体积为

$$V=\frac{4\pi a^3}{3}\left[4\sqrt{2}\left(\frac{1}{8}+\frac{3\pi}{64}\right)+\cos\varphi\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\right]$$

$$=\frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.$$

§8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑的曲线AB绕Ox轴旋转所成曲面的面积等于

$$P=2\pi\int_A^B y\,ds,$$

式中ds为弧的微分。

求旋转下列曲线所成曲面的面积：

2486. $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}\ (0\leqslant x\leqslant a)$绕$Ox$轴。

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^a x\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1+\frac{9x}{4a}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a x\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\int_0^a\left(x+\frac{2a}{9}\right)\sqrt{\left(x+\frac{2a}{9}\right)-\left(\frac{2a}{9}\right)^2}\,d\left(x\right.$$

$$+\frac{2a}{9}\Big)-\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{2a}{9}\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\,dx$$

$$=\frac{3\pi}{a}\cdot\frac{1}{3}\left(x^2+\frac{4ax}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$-\frac{2\pi}{3}\left\{\frac{x+\frac{2a}{9}}{2}\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{4a^2}{81}}{2}\ln\left(x+\frac{2a}{9}+\sqrt{x^2+\frac{4ax}{9}}\right)\right\}\Big|_0^a$$

$$=\frac{13\sqrt{13}}{27}\pi a^2-\frac{11\sqrt{13}}{81}\pi a^2$$

$$+\frac{4\pi a^2}{243}\ln\frac{11+3\sqrt{13}}{2}$$

$$=\frac{4\pi a^2}{243}\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

2487. $y=a\cos\frac{\pi x}{2b}$ $(|x|\leqslant b)$ 绕Ox轴.

解 $y'=-\frac{\pi a}{2b}\sin\frac{\pi x}{2b}$,

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}.$$

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-b}^{b}y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-b}^{b}\frac{a}{2b}\cos\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right.$$

$$+\frac{4b^2}{2}\ln\left|\pi a\sin\frac{\pi x}{2b}\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2\sin^2\frac{\pi x}{2b}}\right|\right\}\Bigg|_0^b$$

$$=2a\sqrt{\pi^2a^2+4b^2}$$

$$+\frac{8b^2}{\pi}\ln\frac{\pi a+\sqrt{4b^2+\pi^2a^2}}{2b}.$$

2488. $y=\operatorname{tg}x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}\right)$绕$Ox$轴。

解 $\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sec^4x}=\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\cdot\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^4x+1}\,d\left(\frac{1}{\cos^2x}\right)$$

$$=\pi\left[\frac{\sqrt{\cos^4x+1}}{\cos^2x}-\ln\left(\cos^2x\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\cos^4x+1}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}\right.$$

$$+\ln\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-1)}{2}\Bigg].$$

2489. $y^2=2px(0\leqslant x\leqslant x_0)$; (a) 绕$Ox$轴;
(б) 绕Oy轴.

解 (a) $\sqrt{1+y_x'^2}=\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_0^{x_0}\sqrt{2px}\cdot\frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}dx$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left[(2x_0+p)\sqrt{2px_0+p^2}-p^2\right].$$

(б) $\sqrt{1+x_y'^2}=\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

于是，所求的表面积为

$$P_y=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}x\sqrt{1+x_y'^2}\,dy$$

$$=4\pi\int_0^{\sqrt{2px_0}}\frac{y^2}{2p}\cdot\frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\int_0^{\sqrt{2px_0}}y^2\sqrt{p^2+y^2}\,dy$$

$$=\frac{2\pi}{p^2}\left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8}\sqrt{p^2+y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{p^4}{8}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2px_0}}$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[(p+4x_0)\sqrt{2x_0(p+2x_0)}$$

$$-p^2\ln\frac{\sqrt{2x_0}+\sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}}\Big].$$

2490. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (0<b\leqslant a)$：(a) 绕$Ox$轴；

(б) 绕Oy轴。

解 (a) $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$，$yy'=-\frac{b^2}{a^2}x$，

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{y^2+(yy')^2}$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}.$$

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx$$

$$=\frac{2\pi b}{a}\left(a\sqrt{a^2-\varepsilon^2a^2}+\frac{a^2}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right)$$

$$=2\pi b\left(b+\frac{a}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon\right),$$

其中$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$是椭圆之离心率。

(б) 将x，y轴对调，即将x轴作为短轴。于是在所得出的$y\sqrt{1+y'^2}$中仅需将a与b的位置对调一下即可，即

$$y\sqrt{1+y'^2}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{a^2-b^2}{b^2}x^2}$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是，所求表面积为

$$P_b=2\pi\frac{a}{b}\int_{-b}^{b}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\,dx$$

$$=2\pi a\frac{1}{b}\left[\frac{x}{2}\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right.$$

$$\left.+\frac{b^3}{2c}\ln\left(\frac{c}{b}x+\sqrt{b^2+\frac{c^2}{b^2}x^2}\right)\right]\Bigg|_{-b}^{b}$$

$$=2\pi a\left(\sqrt{b^2+c^2}+\frac{b^2}{2c}\ln\left[\frac{\sqrt{b^2+c^2}+c}{\sqrt{b^2+c^2}-c}\right]\right)$$

$$=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2c}\ln\left[\frac{a+c}{a-c}\right]\right)$$

$$=2\pi a\left(a+\frac{b^2}{2a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

$$=2\pi a\left\{a+\frac{b^2}{a}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]\right\}.$$

2491. $x^2+(y-b)^2=a^2\ (b\geqslant a)$ 绕Ox轴.

解 此圆分成两单值支

$$y=b+\sqrt{a^2-x^2}\text{及}y=b-\sqrt{a^2-x^2}.$$

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$+2\pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=4\pi^2ab.$$

2492. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$绕$Ox$轴。

解 $y'=-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$，$\sqrt{1+y'^2}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx$$

$$=-\frac{12\pi a^{\frac{1}{3}}}{5}(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a$$

$$=\frac{12\pi a^2}{5}.$$

2493. $y=a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(|x|\leqslant b)$: (a) 绕Ox轴；

(б) 绕Oy轴。

解 (a) $\sqrt{y'^2+1}=\sqrt{\mathrm{sh}^2\frac{x}{a}+1}=\mathrm{ch}\frac{x}{a}$.

于是，所求的表面积为

$$P_x=2\pi a\int_{-b}^{b}\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}\,dx$$

$$=2\pi a\int_0^b\left(1+\mathrm{ch}\frac{2x}{a}\right)dx$$

$$=\pi a\left(2b+a\,\mathrm{sh}\frac{2b}{a}\right).$$

(б) $P_y = 2\pi\int_0^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx$

$$=2\pi\int_0^b x\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,dx$$

$$=2\pi a\left(a+b\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}-a\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a}\right).$$

2494. $\pm x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$绕$Ox$轴。

解 $x'_y = \mp\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$，$\sqrt{1+x_y'^2}=\frac{a}{y}$

$(0\leqslant y\leqslant a)$。

于是，所求的表面积为

$$P_x = 2\cdot 2\pi\int_0^a y\,\frac{a}{y}\,dy = 4\pi a^2.$$

2495. $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$：
(а) 绕Ox轴；(б) 绕Oy轴；(в) 绕直线$y=2a$：

解 先求ds：

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

于是，所求的表面积为

(а) $P_x=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 u\,du=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

(б) $P_x=2\pi\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=16\pi^2a^2。$$

(в) 作平移 $x=\overline{x}$，$y=\overline{y}+2a$ 则

$$\overline{y}=-a(1+\cos t)，$$

于是，所求的表面积为

$$P_{\overline{x}}=\left|2\pi\int_0^{2\pi}\left[-a(1+\cos t)\right]2a\sin\frac{t}{2}dt\right|^{*)}$$

$$=\frac{32}{3}\pi a^2。$$

*) 在此取绝对值，是由于被积函数始终不为正之故。

2496. $x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ 绕直线 $y=x$。

解 先求 ds：

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$$

$$=\begin{cases}3a\sin t\cos t\,dt，& 当\frac{\pi}{4}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}，\\ -3a\sin t\cos t\,dt，& 当\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{3\pi}{4}。\end{cases}$$

利用对称性，并作旋转，即得所求的表面积为

$$P=2\left[2\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt\right]$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^3t-a\cos^3t)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(a\sin^3t-a\cos^3t)\cdot 3a\sin t\cos t\,dt\right]$$

$$=\frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{5}\sin^5t+\frac{1}{5}\cos^5t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

2497. $r=a(1+\cos\varphi)$绕极轴。

解 $ds=\sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\,d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$,

$y=r\sin\varphi=a(1+\cos\varphi)\sin\varphi$

$=4a\cos^3\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$.

于是，所求的表面积为

$$P=2\pi\int_0^\pi 8a^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

2498. $r^2=a^2\cos 2\varphi$:（a）绕极轴；（б）绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{2}$；

（в）绕轴 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

解 （a）$y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$，$ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$.

于是，所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin\varphi\,d\varphi=2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

（б） $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\ \left(-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\right).$

于是，所求的表面积为

$$P=2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$=2\pi a^2\sqrt{2}.$$

（в） $x=a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi,\ \ y=a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi,$

$$ds=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi.$$

注意到在$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$内恒有$x-y\geqslant 0$，于是，所求的表面积为

$$P=2\cdot 2\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x-y}{\sqrt{2}}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\varphi-\sin\varphi)\,d\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^2}{\sqrt{a}}(\sin\varphi+\cos\varphi)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=4\pi a^2.$$

2499. 由抛物线$ay=a^2-x^2$及Ox轴所包围的图形绕Ox轴旋转而构成一旋转体。求其表面积与等体积球的表面

积之比。

解 首先求此旋转体的表面积。

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而

$$P_x=2\cdot 2\pi\int_0^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)\cdot\frac{2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}}{a}dx$$

$$=8\pi\int_0^a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx-\frac{8\pi}{a^2}\int_0^a x^2\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}dx$$

$$=8\pi\left\{\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}+\frac{a^2}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}\Bigg|_0^a$$

$$-\frac{8\pi}{a^2}\left\{\frac{x\left(2x^2+\frac{a^2}{4}\right)}{8}\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right.$$

$$\left.-\frac{a^4}{128}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\frac{a^2}{4}}\right)\right\}^{*)}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln\ (2+\sqrt{5})\right];$$

其次，求旋转体的体积。

$$V_x=\pi\int_{-a}^a\left(a-\frac{x^2}{a}\right)^2dx=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 R，则

$$\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{16\pi a^3}{15}.$$

所以

$$R=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}a.$$

于是，此球的表面积为

$$P=4\pi R^2=4\pi\sqrt[3]{\frac{16}{25}}a^2.$$

最后得到

$$\frac{P_x}{P}=\frac{\frac{\pi a^2}{8}\left[7\sqrt{5}+\frac{17}{2}\ln(2+\sqrt{5})\right]}{\frac{8\pi a^2}{5}\sqrt[3]{10}}$$

$$=\frac{5[14\sqrt{5}+17\ln(2+\sqrt{5})]}{128\cdot\sqrt[3]{10}}$$

$$\doteq 1.013.$$

*) 利用1820题的结果。

2500. 由直线 $x=\frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2=2px$ 所包围的图形绕直线 $y=p$ 而旋转，求这旋转体的体积和表面积。

解 $V_{y=p}=\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p+\sqrt{2px})^2dx$

$$-\int_0^{\frac{p}{2}}\pi(p-\sqrt{2px})^2dx$$

$$=4\pi p\int_0^{\frac{p}{2}}\sqrt{2px}\,dx$$

$$=\frac{4}{3}\pi p^3.$$

旋转体的侧面积为

$$S_{侧}=\int_{(l)}2\pi(p+\sqrt{2px})ds$$

$$+\int_{(l)}2\pi(p-\sqrt{2px})ds$$

$$=4\pi p\int_{(l)}ds=4\pi p\int_0^p\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}dy$$

$$=4\pi\int_0^p\sqrt{y^2+p^2}dy$$

$$=4\pi\left(\frac{y}{2}\sqrt{y^2+p^2}\right.$$

$$\left.+\frac{p^2}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+p^2})\right)\Big|_0^p$$

$$=2\pi p^2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})],$$

而底面积为

$$S_{底}=\pi(2p)^2=4\pi p^2,$$

于是，所求的表面积为

$$P=S_{侧}+S_{底}$$

$$=2\pi p^2[(2+\sqrt{2})+\ln(1+\sqrt{2})].$$

§9. 矩的计算法。重心的坐标

1° 矩 若在 Oxy 平面上，密度为 $\rho=\rho(y)$ 的 质量 M 充满了某有界连续统 Ω（曲线，平面的区域），而 $\omega=\omega(y)$ 为 Ω 中纵标不超过 y 的部分的对应的度量（弧长，面积），则数

$$M_k=\lim_{\max|\Delta\omega_i|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(y_i)y_i^k\Delta\omega(y_i)$$

$$=\int_{\Omega}\rho y^k d\omega(y)\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

称为质量M对于 Ox 轴的k次矩。

特殊情形，当 $k=0$ 时得质量M，当 $k=1$ 时得静力矩，当 $k=2$ 时得转动惯量。

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩。

若 $\rho=1$，则对应的矩称为几何矩（线矩，面积矩，体积矩等等）。

2° 重心　均匀平面图形 S的重心的坐标(x_0, y_0)根据下面的公式来定义

$$x_0=\frac{M_1^{(y)}}{S},\quad y_0=\frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中$M_1^{(y)}$，$M_1^{(x)}$为面积 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静力矩。

2501．求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两端点直径的静力矩和转动惯量。

解　取此直径所在的直线作为 Ox 轴，圆心作为原点，则圆的方程为

$$x^2+y^2=a^2.$$

从而

$$y=\sqrt{a^2-x^2}$$

及

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx=\frac{a}{y}dx=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx.$$

于是，所求的静力矩和转动惯量*) 为

$$M_1=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=2a^2$$

及

$$M_2=\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=2a\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^3}{2}.$$

2502. 求底为 b，高为 h 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩和转动惯量（$\rho=1$）。

解 取坐标系如图4.46所示。

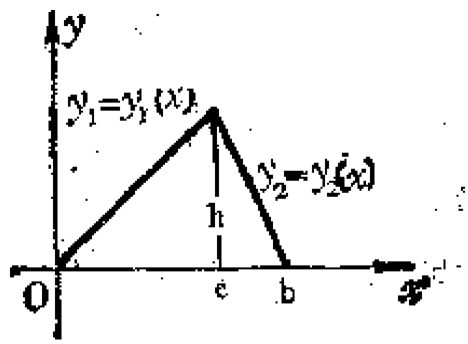

图 4.46

$$M_1^{(x)}=\frac{1}{2}\int_0^b y^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^c y_1^2dx+\frac{1}{2}\int_c^b y_2^2dx.$$

由于

$$y_1=y_1(x)=\frac{h}{c}x,$$

*) 这里假定 $\rho=1$，今后有类似情况，不再说明。

$$y_2 = y_2(x) = \frac{h}{c-b}(x-b),$$

于是，所求的静力矩为

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2}\int_0^b \frac{h^2}{c^2}x^2 dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^b \frac{h^2}{(c-b)^2}(x-b)^2 dx$$

$$= \frac{bh^2}{6}.$$

又由于

$$x_1 = x_1(y) = \frac{c}{h}x,$$

$$x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y,$$

于是，所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_0^h y^2(x_2 - x_1)dy$$

$$= \int_0^h y^2\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy = \frac{bh^3}{12}.$$

2503. 求半轴长为 a 和 b 的均匀椭圆形薄板对于其主轴的转动惯量（$\rho = 1$）。

解 不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则上、下半椭圆方程为

$$x_1=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},$$

$$x_2=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}.$$

于是，所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)}=\int_{-b}^{b}y^2(x_2-x_1)dy$$

$$=2\int_{-b}^{b}\frac{a}{b}y^2\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$=4ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\ ^{*)}$$

$$=\frac{\pi ab^3}{4}.$$

至于 $M_2^{(y)}$，由对称性知：只须在 $M_2^{(x)}$ 的结果中将 a，b 对调即得。所以

$$M_2^{(y)}=\frac{\pi a^3b}{4}.$$

*) 设 $y=b\sin\varphi$。

2504．求底半径为 r 和高为 h 的均匀圆锥对于其底平面的静力矩和转动惯量（$\rho=1$）。

解 取坐标系如图4.47所示，则

$$M_1=\int_0^h x\cdot P(x)\,dx,$$

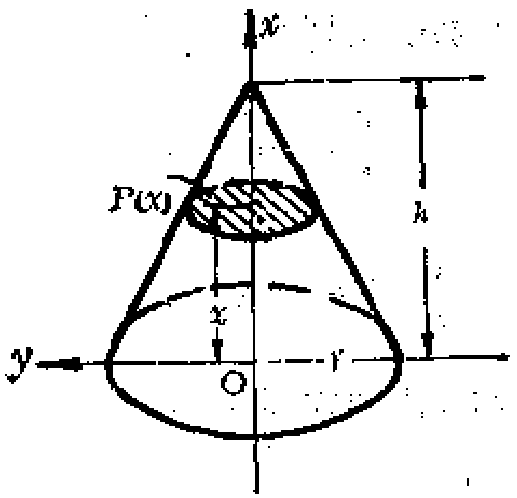

图 4.47

其中

$$P(x)=\pi y^2=\pi\left[\frac{r}{h}(h-x)\right]^2.$$

于是，所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x(h-x)^2\,dx=\frac{\pi r^2h^2}{12};$$

$$M_2=\int_0^h x^2\cdot P(x)\,dx$$

$$=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2(h-x)^2dx=\frac{\pi r^2h^3}{30}.$$

2505. 证明古尔金第一定理：弧C绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积，等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圆周之长的乘积。

证 重心(ξ,η)具有这样的性质，即如把曲线的全部"质量"都集中到它上面，则此质量对于任何一个轴的静力矩，都与曲线对此轴的静力矩相同．即

$$\xi s = M_y = \int_0^s x\,ds,$$

$$\eta s = M_x = \int_0^s y\,ds,$$

式中 s 表示弧长。

于是

$$2\pi\eta\cdot s = 2\pi\int_0^s y\,ds.$$

上式的右端是弧C旋转而成的曲面面积，左端 $2\pi\eta$ 表示弧C 绕 Ox 轴旋转时其重心所划出的圆周之长。从而定理得证。

2506. 证明古尔金第二定理：面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体，其体积等于面积 S与这面积的重心所划出的圆周之长的相乘积.

证 由于

$$\eta\cdot S = M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx,$$

所以

$$2\pi\eta\cdot S = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$

上式右端即为旋转体的体积，从而定理得证。

2507. 求圆弧：$x = a\cos\varphi$，$y = a\sin\varphi$（$|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$）重心的坐标。

解 显见

$$\eta = 0,$$

圆弧长

$$s=2a\alpha.$$

由于

$$M_y=\int_0^s x\ ds=\int_{-\alpha}^{\alpha} a^2\cos\varphi\ d\varphi=2a^2\sin\alpha,$$

所以

$$\xi=\frac{2a^2\sin\alpha}{2a\alpha}=\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$

即重心为$\left(\frac{a\sin\alpha}{\alpha},\ 0\right)$.

2508. 求抛物线：$ax=y^2$，$ay=x^2$（$a>0$）所围成面积的重心的坐标.

解 利用古尔金第二定理来解此题. 首先，此面积为

$$S=\frac{a^2}{3}{}^{*)},$$

体积为

$$V=\pi\int_0^a\left(ax-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=\frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是

$$2\pi\eta\cdot\frac{a^2}{3}=\frac{3\pi a^3}{10},$$

所以

$$\eta=\frac{9a}{20}.$$

利用对称性知

$$\xi=\eta=\frac{9a}{20}.$$

即所求的重心为$\left(\frac{9a}{20},\ \frac{9a}{20}\right)$。

*) 利用2397题的结果。

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\ (0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b)$$

的重心的坐标。

解 首先，我们已知第一象限椭圆的面积等于$\frac{\pi ab}{4}$。

其次，我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积。因为

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

所以

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

按古尔金第二定理，我们有

$$2\pi\ \eta\frac{\pi ab}{4}=\frac{2}{3}\pi ab^2,$$

所以

$$\eta=\frac{4b}{3\pi}.$$

同理可求得

$$\xi=\frac{4a}{3\pi}.$$

事实上，只须在结果中将 a 和 b 对调即得。于是，所求的重心为$\left(\frac{4a}{3\pi},\ \frac{4b}{3\pi}\right)$。

2510．求半径为 a 的均匀半球的重心坐标。

解 取圆心作为原点，则球的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

设重心为$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，显见$\xi=\eta=0$．而

$$V_{半球}=\frac{2\pi a^3}{3}.$$

将圆

$$y^2+z^2=a^2$$

绕Oz轴旋转，即得球。

又

$$M_1^{(z)}=\int_{(V)} z\,dV=\pi\int_0^a z\,y^2\,dz$$

$$=\pi\int_0^a z(a^2-z^2)\,dz=\frac{\pi a^4}{4}.$$

最后得到

$$\zeta=\frac{M_1^{(z)}}{V}=\frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}}=\frac{3a}{8}.$$

于是，所求重心为$\left(0,\ 0,\ \frac{3a}{8}\right)$。

2511. 求对数螺线

$$r=ae^{m\varphi}\quad(m>0)$$

上由点$O(-\infty,\ 0)$到点$P(\varphi,\ r)$的弧OP的重心$C(\varphi_0,\ r_0)$之坐标。当P点移动时，C点画出怎样的曲线？

解 重心的直角坐标为

$$\xi=\frac{\int_{(l)}x\,ds}{\int_{(l)}ds}$$

$$=\frac{\int_{-\infty}^{\varphi}r\cos\varphi\cdot\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}\sqrt{a^2(1+m^2)}\,e^{m\varphi}\,d\varphi}$$

$$=\frac{a\int_{-\infty}^{\varphi}e^{2m\varphi}\cos\varphi\,d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi}e^{m\varphi}d\varphi}$$

$$=\frac{mae^{m\varphi}(\sin\varphi+2m\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

同法可得

$$\eta=\frac{\int_{(l)}y\,ds}{\int_{(l)}ds}=\frac{mae^{m\varphi}(2m\sin\varphi-\cos\varphi)}{4m^2+1}.$$

于是，重心的极坐标为

$$r_0=\sqrt{\xi^2+\eta^2}=\frac{ma}{4m^2+1}\sqrt{4m^2+1}\,e^{m\varphi}$$

$$=\frac{mr}{\sqrt{4m^2+1}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{\eta}{\xi}=\frac{2m\operatorname{tg}\varphi-1}{\operatorname{tg}\varphi+2m}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\frac{1}{2m}}{1+\frac{1}{2m}\operatorname{tg}\varphi},$$

即 $\varphi_0=\varphi-\alpha$，其中$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2m}$。

当P点移动时，$C(\varphi_0,\ r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m\varphi}=\frac{ma}{\sqrt{4m^2+1}}e^{m(\varphi_0+\alpha)}.$$

这也是一条对数螺线。

2512. 求曲线 $r=a(1+\cos\varphi)$所围面积的重心坐标。

解 计算时，将小扇形的重量集中在其重心$\left(\frac{2}{3}r\cos\varphi,\ \frac{2}{3}r\sin\varphi\right)$处。由对称性知 $\eta=0$，而

$$\xi=\frac{\int_{(l)}xy\,dx}{\int_{(l)}y\,dx}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\int_0^\pi r\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}r^2d\varphi}{\int_0^\pi\frac{1}{2}r^2d\varphi}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{\int_0^\pi a^3(1+\cos\varphi)^3\cos\varphi d\varphi}{\int_0^\pi a^2(1+\cos\varphi)^2d\varphi}$$

$$=\frac{2a}{3}\frac{\int_0^{\pi}(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\cos\varphi d\varphi}{\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi}$$

$$=\frac{5a}{6}.$$

于是，重心的极坐标为 $\varphi_0=0$， $r_0=\frac{5a}{6}$.

2513. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的第一拱与 Ox 轴所围成面积的重心的坐标，

解 由对称性知 $\xi=\pi a$。由于面积 $S=3\pi a^2$*) 及面积 S 绕 Ox 轴旋转而成的曲面包围的体积 $V_x=5\pi^2a^2$**)，利用古尔金第二定理，即得重心 (ξ,η) 适合下列关系式

$$2\pi\eta\cdot S=V_x$$

或

$$\eta=\frac{V_x}{2\pi S}=\frac{5\pi^2a^3}{2\pi\cdot 3\pi a^2}=\frac{5a}{6}.$$

于是，重心为 $\left(\pi a,\frac{5a}{6}\right)$.

*) 利用2413题的结果。

**) 利用2480题(a)的结果。

***) 参看2506题。

2514. 求面积 $0\leqslant x\leqslant a$; $y^2\leqslant 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的重心的坐标。

解 由对称性知 $\eta=0$.又

$$\xi=\frac{\int_0^a x\pi y^2dx}{\int_0^a \pi y^2dx}=\frac{\int_0^a 2px^2dx}{\int_0^a 2pxdx}$$

$$=\frac{2}{3}a.$$

于是，所求的重心为$\left(\frac{2}{3}a,\ 0\right)$.

2515. 求半球$x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$的重心的坐标。

解 由对称性知

$$\xi=\eta=0.$$

$$\zeta=\frac{\int_0^a 2\cdot 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}\,dz}{\int_0^a 2\pi x\sqrt{1+x'^2_z}\,dz}{}^{*)}$$

$$=\frac{\int_0^a 2\pi z\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}{\int_0^a 2\pi\sqrt{a^2-z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}}dz}$$

$$=\frac{2\pi a\int_0^a zdz}{2\pi a\int_0^a dz}=\frac{2\pi a\cdot\frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

于是，所求的重心为$\left(0,\ 0,\ \frac{a}{2}\right)$.

*) 在此是将$x^2+z^2=a^2$绕Oz轴旋转而得半球面。

§10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限，来解下列问题：

2516. 轴的长度$l=10$米，若该轴的线性密度按定律$\delta=6+0.3x$千克/米而变更，其中x为距轴两端点中之一端的距离，求轴的质量。

解 将轴n等分，每份的长$\Delta x=\frac{10}{n}$。把每小段近似地看成是均匀的，并以右端点的密度作为小段的密度。这样，便得到轴的质量M的近似值，即

$$M\approx\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}i\right)\frac{10}{n}.$$

显然，n愈大愈近似，于是，得轴的质量

$$M=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(6+0.3\times\frac{10}{n}\right)\frac{10}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[60+\frac{15\times(n+1)}{n}\right]=75\text{（千克）}.$$

2517. 把质量为m的物体从地球（其半径为R）表面升高到高度为h的地位，需要化费多大的功？若物体远离至无穷远去，则功等于什么？

解 由牛顿万有引力定律

$$f=k\frac{mM}{r^2},$$

其中M为地球的质量，r为物体离开地球中心的距

离，k为比例常数。将h分成n等份，在每份上把引力近似地看作是不变的，在第i份上取

$$r_i=\sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{h}{n}i+R\right]}，$$ 则力

$$f_i=k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\cdot\left[\frac{h}{n}i+R\right]},$$

于是所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}k\frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1)+R\right]\left[\frac{hi}{n}+R\right]}\cdot\frac{h}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}kmMn\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{h(i-1)+nR}-\frac{1}{hi+nR}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}kmMn\left[\frac{1}{nR}-\frac{1}{n(R+h)}\right]$$

$$=\frac{kmMh}{(R+h)R},$$

其中g为重力加速度，$k=\frac{gR^2}{M}$为引力常数。若物体远离至无穷远去，则功

$$A_\infty=\lim_{h\to\infty}W=\lim_{h\to\infty}\frac{kmMh}{(R+h)R}=mgR.$$

2518．若1千克的力能使弹簧伸长1厘米，现在要使这弹簧伸长10厘米，问需要花费多大的功？

解 由虎克定律知，弹性恢复力 F 与伸长量 x 成正比，即

$$F=kx.$$

由条件知：$k=1$. 因而 $F=x$.

现将10厘米 n 等分，每份上恢复力的大小近似地看作是不变的，并取右端点来作和，即得功 W 的近似值

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n}.$$

显然，n 愈大愈近似. 于是，所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{10}{n}i\cdot\frac{10}{n}=\lim_{n\to\infty}50\frac{n+1}{n}$$

$$=50\text{（千克厘米）}=0.5\text{（千克米）}.$$

2519. 直径为 20 厘米，长为 80 厘米的圆柱被压力为 10 千克/厘米^{2}的蒸汽充满着. 假定气体的温度不变，要使气体的体积减小一半，须要化费多大的功？

解 由波义耳—马利奥特定律有

$$pv=C,$$

其中 p 表示气体的压力，v 表示体积，C 为常量. 由条件知，常量

$$C=10\cdot\pi\cdot100\cdot80=800\pi\text{（千克米）}.$$

设初始时气体体积为 v_0，将区间 $\left[\frac{v_0}{2},\ v_0\right]$ 分成 n 个小区间，分点依次为

$$\frac{v_0}{2},\ \frac{v_0}{2}q,\ \frac{v_0}{2}q^2,\ \cdots\frac{v_0}{2}q^i,\ \cdots\frac{v_0}{2}q^n=v_0,$$

其中 $q=\sqrt[n]{\frac{v_0}{\frac{v_0}{2}}}=\sqrt[n]{2}$，由于气体体积从$\frac{v_0}{2}q^{i+1}$减小至$\frac{v_0}{2}q^i$须要化费功的近似值为

$$C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right),$$

于是，所要求的功

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}C\left(\frac{v_0}{2}q^i\right)^{-1}\left(\frac{v_0}{2}q^{i+1}-\frac{v_0}{2}q^i\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}Cn\left(\sqrt[n]{2}-1\right)=C\ln 2\ ^{*)}$$

$$=800\pi\cdot\ln 2\doteq 1742\ (\text{千克米})\text{。}$$

*) 利用541题的结果。

2520．求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为半圆形，半径为a且其直径位于水的表面上。

解 为求出水对半圆形的压力，只要计算出作用于四分之一圆上的压力，然后再把它两倍起来．现将四分之一圆等分成n个圆心角为$\Delta\theta$的小扇形（图4.48）．作用于该小扇形上的压力的近似值为

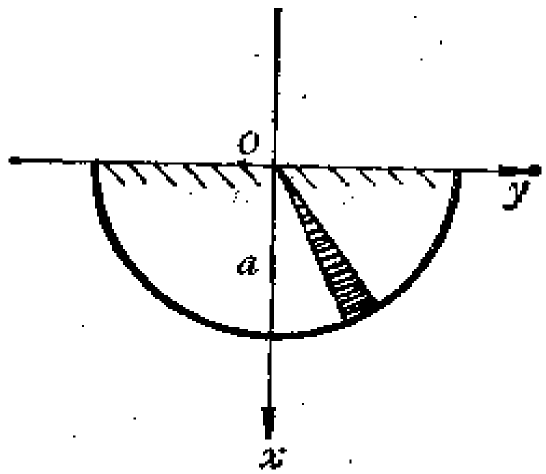

图 4.48

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta\cdot\frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta=\frac{\pi}{2n}$, $\theta_i=\frac{i\pi}{2n}$.

于是，作用于半圆上的压力

$$P=2\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{2}{3}a\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

$$=\frac{2a^3}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{2a^3}{3}.^{*)}$$

*) 利用2187题的结果。

2521. 求水对于垂直壁上的压力，这壁的形状为梯形，其下底 $a=10$米，上底 $b=6$米，高 $h=5$米，下底沉没于水面下的距离为 $c=20$米。

解 取坐标系如图4.49所示。AB 所满足的方程为

$$y=\frac{4}{5}x-6.$$

将区间[15, 20] n 等分，每份长 $\Delta x=\frac{5}{n}$.对应于 Δx 的小条上所受的压力的近似值为

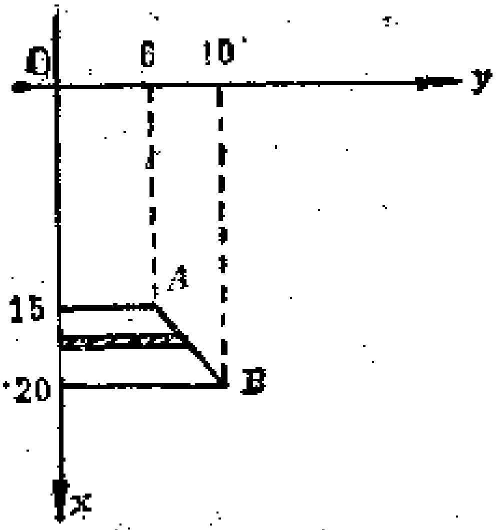

图 4.49

$$\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}.$$

于是，所要求的压力

$$P=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4}{5}\left(15+\frac{5i}{n}\right)-6\right]\left(15+\frac{5i}{n}\right)\frac{5}{n}$$

$$=708\frac{1}{3}\ (\text{吨})\ ^{*)}$$

*） 仿照2185题和2518题的作法。

作出微分方程式以解下列问题：

2522. 点运动的速度是按下面的规律而变化：

$$v=v_0+at.$$

问在闭间隔[0，T]内这点经过的路程怎样？

解 设路程为 s，则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt}=v=v_0+at,$$

即dt时间内经历的路程

$$ds=(v_0+at)\,dt,$$

于是，

$$s=\int_0^T(v_0+at)\,dt$$

$$=v_0T+\frac{1}{2}aT^2.$$

2523. 半径为 R 而密度为 δ 的均匀球体以角速度 ω 绕其直径而旋转。求此球的动能。

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$。不妨设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则考察以 dz 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘，其转动惯量为

$$dJ_z=\frac{1}{2}\pi(R^2-z^2)\delta\cdot(R^2-z^2)dz$$

$$=\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2dz.$$

从而球体的转动惯量

$$J_z=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}\pi\delta(R^2-z^2)^2dz=\frac{8}{15}\pi\delta R^5.$$

于是，球的动能

$$E=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{4}{15}\pi\ \delta\omega^2R^5.$$

注 原题误为球壳，现根据原答案予以改正。

2524. 具不变的线性密度 μ_0 的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点？

解 取坐标系如图4.50所示，$|AO|=a$。设引力在坐

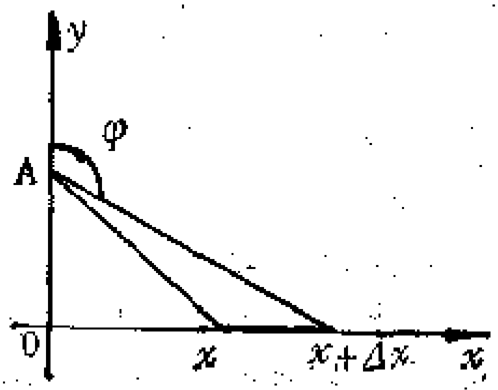

图 4.50

标轴上的射影为F_x、F_y。由于

$$dF_y = k\frac{m\mu_0 dx}{(a^2+x^2)}\cos\varphi$$

$$= -\frac{k\,m\,\mu_0\,a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是，

$$F_y = -2km\,\mu_0\,a\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2k\,m\,\mu_0\,a\cdot\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= -\frac{2km\mu_0}{a}.$$

由对称性知，$F_x = 0$。事实上，我们有

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k\,m\,\mu_0\sin\varphi}{a^2+x^2}dx$$

$$= km\,\mu_0\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = 0.$$

其中 k 为引力常数。由上述分析知，引力指向y轴的负向。

2525. 计算半径为 a 及固定的表面密度为 δ_0 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为m的质点P，此质点位于通过薄板中心Q且垂直于薄板平面的垂直线上，最短距离PQ等于 b。

解 取坐标系如图4.51所示。显然，引力指向y轴的正向。对于以x为半径的圆环，其质量为$dm=\delta_0\cdot 2\pi x\,dx$，对质点$P$的引力

$$dF_y=2\,k\,m\delta_0\ \pi\frac{\cos\theta}{b^2+x^2}dx$$

$$=2k\,m\,\delta_0\pi\ \frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx,$$

于是，所要求的引力

$$F_y=2k\,m\,\delta_0\pi\int_0^a\frac{bx}{(b^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

$$=2km\,\delta_0\ \pi\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

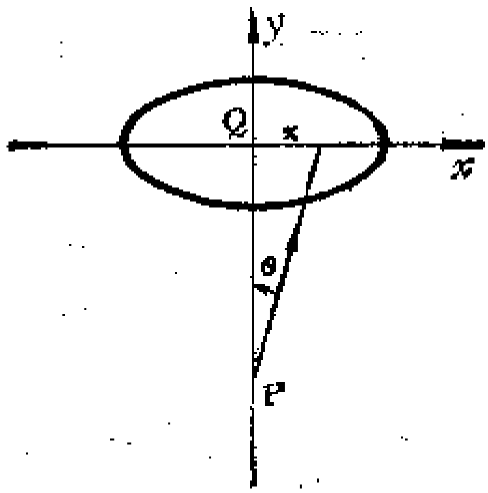

图 4.51

2526．根据托里拆利定律，液体从容器中流出的速度等于

$$v=c\sqrt{2gh},$$

式中g为重力加速度，h为液体表面在开孔上之高，

$c=0.6$为实验系数。

直径为 $D=1$ 米及高为 $H=2$ 米的直立圆柱形大桶，充满之后从其底上直径为 $d=1$ 厘米的圆孔流出，须要多长时间，完全流空？

解 取坐标系如图4.52所示。对于 dt 时间，从圆孔流出的液体体积

$$dv=0.15\pi\sqrt{2gx}\,dt,$$

而桶内液体体积的减少量为

$$dv=-\pi(50)^2dx,$$

其中 x 随时间 t 的增大而减小。流出的量应等于桶内减少的量，于是

$$-0.15\pi\sqrt{2gx}\,dt=\pi(50)^2dx.$$

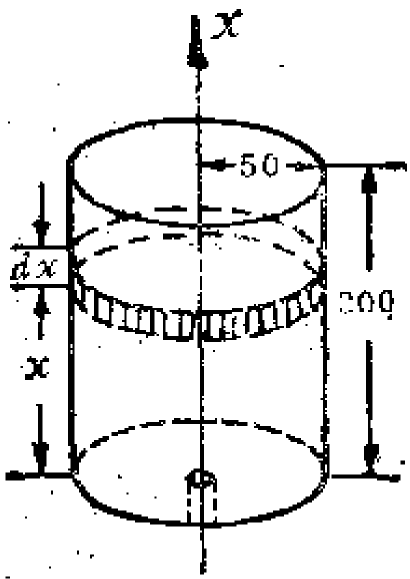

图 4.52

积分，得

$$\int_0^t dt=-\int_{200}^x\frac{2500}{0.15}\frac{dx}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t=-33333\frac{1}{\sqrt{2g}}(\sqrt{x}-\sqrt{200}),$$

其中 $g=980$厘米/秒^2。当 $x=0$ 时，t 表示水流完所需的时间。因而所要求的时间

$$t=\frac{33333\sqrt{200}}{\sqrt{2\times980}}=10648\ (秒).$$

2527. 旋转体的容器应当是什么形状，才能使液体流出时，液体表面的下降是均匀的？

解 取坐标系如图4.53所示。不妨设流出孔的半径为单位厘米。

仿上题分析，得

$$\pi x^2 dy = -\pi v dt$$

$$= -\pi c\sqrt{2gy}\,dt,$$

即

$$dy = -c\sqrt{2g}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2}dt.$$

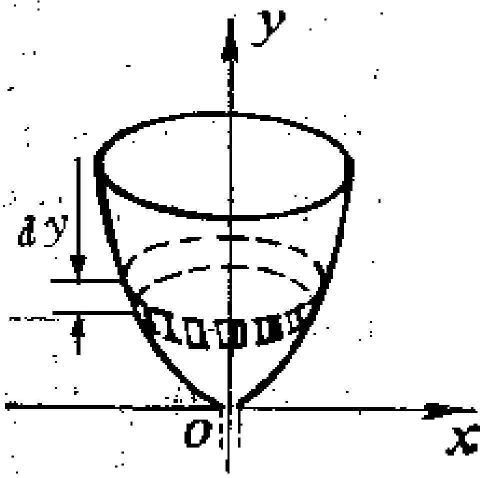

图 4.53

其中 c 为实验系数，g 为重力加速度。

由题意知

$$\frac{dy}{dt} = -c\sqrt{2g}\frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

应等于常数 k，即

$$-c\sqrt{2g}\cdot\frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是

$$y = Cx^4,$$

其中C为常数。所以，容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴Oy旋转而得的曲面所构成的。

2528. 镭在每一时刻的分解速度与其现存的量成比例，设在开始的时刻 $t=0$ 有镭 Q_0 克，经过时间 $T=1600$ 年

它的量减少了一半。求镭分解的规律。

解 设Q为镭现存的量，按题设有

$$\frac{dQ}{dt}=kQ,$$

其中k为比例系数。即

$$\frac{dQ}{Q}=k\,dt,$$

两端积分：

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}}\frac{dQ}{Q}=\int_0^{1600}k\,dt,$$

从而

$$k=-\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是

$$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=-\frac{\ln 2}{1600}\int_0^t dt,$$

$$\ln\frac{Q}{Q_0}=\ln 2^{-\frac{t}{1600}},$$

所以，镭的分解规律为

$$Q=Q_0\cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529⁺. 变换物质A为物质B的二阶化学反应之速度与此二物质的浓度相乘之积成正比。问经过$t=1$小时在容器中所含有的物质B之百分率如何？设$t=0$分时有20%的物质B，而当$t=15$分它变成80%。

解 设x为生成物B的浓度，按题设有

$$\frac{dx}{dt}=kx(1-x),$$

其中 k 为比例常数。即

$$\frac{dx}{x(1-x)}=k\,dt.$$

两端积分

$$\int_{0.2}^{0.8}\frac{dx}{x(1-x)}=\int_{0}^{15}k\,dt,$$

从而

$$k=\frac{1}{15}\ln 16.$$

于是，

$$\int_{0.2}^{x}\frac{dx}{x(1-x)}=\int_{0}^{t}k\,dt=\frac{t}{15}\ln 16,$$

即

$$t=\frac{15}{\ln 16}\ln\frac{4x}{1-x}.$$

以 $t=60$ 代入上式，得

$$x=\frac{16^4}{16^4+4}=99.99\%.$$

所以，经过 $t=1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率为99.99%。

2530．根据虎克定律，棒的相对伸长率 e 与在对应的横断面上的应力 σ 成比例，即是说

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

式中E为杨氏模数。

求圆锥形重棒的伸长，此锥形的顶向下而底固定，设底半径等于R，圆锥的高为H，比重为γ。

解 取坐标系如图4.54所示。

设$z=h$截面处，对于高度为dh的锥体伸长为dl，则有

$$\varepsilon = \frac{dl}{dh}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 (H-h)\gamma}{\pi r^2 E}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma,$$

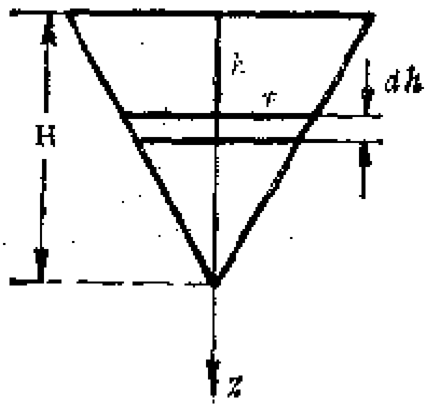

图 4.54

即

$$dl = \frac{1}{3}\frac{(H-h)}{E}\gamma\, dh.$$

于是圆锥形重棒总的伸长量为

$$l = \int_0^H \frac{1}{3}\frac{(H-h)\gamma}{E} dh = \frac{\gamma H^2}{6E}.$$

§11. 定积分的近似计算法

1° 矩形公式 若函数$y=y(x)$于有穷的闭区间$[a, b]$

上连续且可微分充分多次数，并且 $h=\frac{b-a}{n}$，$x_i=a+ih$ $(i=0, 1, \cdots, n)$，$y_i=y(x_i)$，则

$$\int_a^b y(x)dx=h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

式中

$$R_n=\frac{(b-a)^2}{2n}y'(\xi)\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

2° 梯形公式 用相同的记号有

$$\int_a^b y(x)dx=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi')\ (a\leqslant\xi'\leqslant b).$$

3° 抛物线公式（辛普森公式）命 $n=2k$，得

$$\int_a^b y(x)\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2})]+R_n,$$

式中

$$R_n=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi'')\ (a\leqslant\xi''\leqslant b).$$

2531. 利用矩形公式($n=12$)，近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

并把结果同精确答数比较。

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0$, $y_0=0$;

$x_1=\frac{\pi}{6}$, $y_1=\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}=0.2618$;

$x_2=\frac{\pi}{3}$, $y_2=\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=0.9069$;

$x_3=\frac{\pi}{2}$, $y_3=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=1.5708$;

$x_4=\frac{2\pi}{3}$, $y_4=\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=1.8138$;

$x_5=\frac{5\pi}{6}$, $y_5=\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6}=1.3090$;

$x_6=\pi$, $y_6=\pi\sin\pi=0$;

$x_7=\frac{7\pi}{6}$, $y_7=\frac{7\pi}{6}\sin\frac{7\pi}{6}=-1.8326$;

$x_8=\frac{4\pi}{3}$, $y_8=\frac{4\pi}{3}\sin\frac{4\pi}{3}=-3.6276$;

$x_9=\frac{3\pi}{2}$, $y_9=\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}=-4.7124$;

$x_{10}=\frac{5\pi}{3}$, $y_{10}=\frac{5\pi}{3}\sin\frac{5\pi}{3}=-4.5345$;

$$x_{11}=\frac{11\pi}{6}, \quad y_{11}=\frac{11\pi}{6}\sin\frac{11\pi}{6}=-2.8798.$$

按矩形公式，得

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{6}(y_0+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7$$
$$+y_8+y_9+y_{10}+y_{11})$$
$$\doteq -6.1390.$$

实际上，

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$$

$$=-x\cos x\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\cos x\,dx$$

$$\doteq -6.2832.$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差：

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$.

解 $h=\frac{1}{8}=0.125.$

$x_0=0,\quad y_0=1;$ $\quad \frac{y_0+y_8}{2}=0.75,$

$x_8=1,\quad y_8=0.5;$

$x_1=\frac{1}{8}=0.125,\quad y_1=0.88889;$

$$x_2=0.25,\qquad y_2=0.8;$$
$$x_3=0.375,\qquad y_3=0.72727;$$
$$x_4=0.5,\qquad y_4=0.66667;$$
$$x_5=0.625,\qquad y_5=0.61538;$$
$$x_6=0.75,\qquad y_6=0.57143;$$
$$x_7=0.875,\qquad y_7=0.53333\quad(+$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i=4.80297.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=h\left(\frac{y_0+y_8}{2}+\sum_{i=1}^{7} y_i\right)$$
$$=0.125(0.75+4.80297)$$
$$\doteq 0.69412,$$

误差为

$$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times 8^2}\cdot\frac{2}{(1+\xi)^3}\right|\quad(0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times 8^2}<0.0027=2.7\times 10^{-3}$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2\doteq 0.69315.$$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\quad(n=12).$

解 $h=\frac{1}{12}=0.08333.$

$x_0=0$, $y_0=1$;

$x_{12}=1$, $y_{12}=\frac{1}{2}=0.5$;

$\frac{y_0+y_{12}}{2}=0.75$,

$x_1=\frac{1}{12}$, $y_1=0.99942$;

$x_2=\frac{1}{6}$, $y_2=0.99539$;

$x_3=\frac{1}{4}$, $y_3=0.98462$;

$x_4=\frac{1}{3}$, $y_4=0.96429$;

$x_5=\frac{5}{12}$, $y_5=0.93254$;

$x_6=\frac{1}{2}$, $y_6=0.88889$;

$x_7=\frac{7}{12}$, $y_7=0.83438$;

$x_8=\frac{2}{3}$, $y_8=0.77143$;

$x_9=\frac{3}{4}$, $y_9=0.70330$;

$x_{10}=\frac{5}{6}$, $y_{10}=0.63343$;

$x_{11}=\frac{11}{12}$， $\underline{y_{11}=0.56489}$（+

$$\sum_{i=1}^{11} y_i=9.27258.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}=h\left(\frac{y_0+y_{12}}{2}+\sum_{i=1}^{11} y_i\right)$$

$$=0.0833(0.75+9.27258)$$

$$\doteq 0.83518,$$

误差为

$$|R_n|=\left|\frac{1}{12\times 12^2}\cdot\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right| \quad (0\leqslant\xi\leqslant 1).$$

利用求极值的方法，估计得$\left|\frac{12\xi^4-6\xi}{(1+\xi^3)^3}\right|$在〔0， 1〕上不超过2. 于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{2}{12\times 12^2}<0.00116=1.16\times 10^{-3}.$$

实际上，

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}=\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^{*)}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\doteq 0.83565.$$

*) 利用1881题的结果。

2534. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx \quad (n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{12}=0.2618$,

$x_0=0$, $y_0=1$; $\quad \frac{y_0+y_6}{2}=0.9330$,

$x_6=\frac{\pi}{2}$, $y_6=0.8660$;

$x_1=\frac{\pi}{12}$, $y_1=0.9916$;

$x_2=\frac{\pi}{6}$, $y_2=0.9682$;

$x_3=\frac{\pi}{4}$, $y_3=0.9354$;

$x_4=\frac{\pi}{3}$, $y_4=0.9014$;

$x_5=\frac{5\pi}{12}$, $y_5=0.8756$ (+

$$\sum_{i=1}^{5} y_i=4.6722.$$

按梯形公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx=h\left(\frac{y_0+y_6}{2}+\sum_{i=1}^{5}y_i\right)$$

$$=0.2618(0.9330+4.6724)$$

$$\doteq 1.4674.$$

误差为

$$|R_n|=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12\times 6^2}|y''(\xi)|,$$

式中 $y=\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}$，$0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 利用$\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant y\leqslant 1$ 及$y^2=1-\frac{1}{4}\sin^2 x$，依次求导可得$|y''|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是，

$$|R_n|\leqslant\frac{\pi^3}{8\times 12\times 6^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}<2.59\times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分：

2535. $\int_1^9\sqrt{x}\,dx\quad(n=4)$.

解 $h=2$.

$x_0=1$，$y_0=1$；

$x_1=3$，$y_1=\sqrt{3}=1.732$；

$x_2=5$，$y_2=\sqrt{5}=2.236$；

$x_3=7$，$y_3=\sqrt{7}=2.646$；

$x_4=9$，$y_4=3$.

按辛普森公式，得

$$\int_1^9\sqrt{x}\,dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_4)+4(y_1+y_3)+2y_2]$$

$$=\frac{2}{3}[4+4(1.732+2.646)+2(2.236)]$$

$\doteq 17.323.$

实际上，

$$\int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{52}{3} \doteq 17.333.$$

2536. $\int_0^\pi \sqrt{3+\cos x}\,dx \quad (n=6)$.

解 $h=\frac{\pi}{6}$.

$x_0=0, \quad y_0=2;$

$x_1=\frac{\pi}{6}, \quad y_1=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3.866}=1.966;$

$x_2=\frac{\pi}{3}, \quad y_2=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3.5}=1.871;$

$x_3=\frac{\pi}{2}, \quad y_3=\sqrt{3+\cos\frac{\pi}{2}}=\sqrt{3}=1.732;$

$x_4=\frac{2\pi}{3}, \quad y_4=\sqrt{3+\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{2.5}$

$=1.581;$

$x_5=\frac{5\pi}{6}, \quad y_5=\sqrt{3+\cos\frac{5\pi}{6}}=\sqrt{2.134}$

$=1.461;$

$x_6=\pi, \quad y_6=\sqrt{3+\cos\pi}=\sqrt{2}=1.414.$

按辛普森公式，得

$$\int_0^\pi \sqrt{3+\cos x}\,dx$$

$$=\frac{\pi}{18}\{(2+1.414)+4(1.966+1.736+1.461)+$$
$$+2(1.871+1.581)\}$$
$$=5.4053.$$

2537^{+}. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx \quad (n=10)$.

解 $h=\frac{\pi}{20}$.

$x_0=0,\ y_0=1;$

$x_1=\frac{\pi}{20},\ y_1=\frac{20}{\pi}\sin\frac{\pi}{20}=0.99589;$

$x_2=\frac{\pi}{10},\ y_2=\frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi}{10}=0.98363;$

$x_3=\frac{3\pi}{20},\ y_3=\frac{20}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{20}=0.96340;$

$x_4=\frac{\pi}{5},\ y_4=\frac{5}{\pi}\sin\frac{\pi}{5}=0.93549;$

$x_5=\frac{\pi}{4},\ y_5=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}=0.90032;$

$x_6=\frac{3\pi}{10},\ y_6=\frac{10}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{10}=0.85839;$

$x_7=\frac{7\pi}{20},\ y_7=\frac{20}{7\pi}\sin\frac{7\pi}{20}=0.81033;$

$x_8=\frac{2\pi}{5},\ y_8=\frac{5}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{5}=0.75683;$

$$x_9=\frac{9\pi}{20},\quad y_9=\frac{20}{9\pi}\sin\frac{9\pi}{20}=0.69865;$$

$$x_{10}=\frac{\pi}{2},\quad y_{10}=\frac{2}{\pi}=0.63662.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{\pi}{60}[(1+0.63662)+4(0.99589+0.96340+0.90032+0.81033+0.69865)+2(0.98363+0.93549+0.85839+0.75683)]$$

$$\doteq 1.37076.$$

2538[+]. $\int_0^1\frac{x\,dx}{\ln(1+x)}\quad(n=6)$.

解 $h=\frac{1}{6}$.

$$x_0=0,\quad y_0=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=1;$$

$$x_1=\frac{1}{6},\quad y_1=1.0812;$$

$$x_2=\frac{1}{3},\quad y_2=1.1587;$$

$$x_3=\frac{1}{2},\quad y_3=1.2332;$$

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=1.3051$;

$x_5=\frac{5}{6}$, $y_5=1.3748$;

$x_6=1$, $y_6=1.4427$.

按辛普森公式，得

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\ln(1+x)} = \frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{1}{18}[(1+1.4427)+4(1.0812+1.2332+1.3748)+2(1.1587+1.3051)]$$

$$\doteq 1.2293.$$

2539. 取 $n=10$，计算加达郎常数

$$C=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}dx.$$

解 $h=\frac{1}{10}$.

$x_0=0$, $y_0=1$;

$x_1=0.1$, $y_1=0.99669$;

$x_2=0.2$, $y_2=0.98698$;

$x_3=0.3$, $y_3=0.97152$;

$x_4=0.4$, $y_4=0.95127$;

$x_5=0.5$, $y_5=0.92730$;

$x_6=0.6$, $y_6=0.90070$;

$x_7=0.7,\ y_7=0.87247;$

$x_8=0.8,\ y_8=0.84343;$

$x_9=0.9,\ y_9=0.81424;$

$x_{10}=1,\ y_{10}=0.78540.$

按辛普森公式，得

$$G=\frac{h}{3}[(y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)$$

$$+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]$$

$$=\frac{1}{30}(1.78540+18.32888+7.36476)$$

$$=0.91597.$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$$

计算数 π精确到10^{-5}。

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x)=-\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}f^{(4)}(\xi)\ (a\leqslant\xi\leqslant b).$$

现在 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，事实上，它是 $y=\mathrm{arc\,tg}\,x$ 的导数，因而

$$f^{(4)}(x)=(\mathrm{arc\,tg}\,x)^{(5)}.$$

利用第二章1218题的结果得知

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}\sin\left(5\mathrm{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

在区间〔0，1〕上，

$$|f^{(4)}(x)|\leqslant 24,$$

所以

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{24}{180n^4}.$$

欲误差小于0.00001，只需

$$\frac{24}{180n^4}<\frac{1}{100000},$$

即只需取 $n=12$，就有 $|R_n|\leqslant 6.5\times10^{-6}$。

其次，我们还必须加进近似于函数值的误差，设法使这个新的误差小于 3.6×10^{-6}，这样，就能保证总误差小于 10^{-5}。为了这个目的，只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 0.5×10^{-6} 就够了。

现取 $n=12$，则有

$x_0=0$，$y_0=1$；

$x_1=\frac{1}{12}$，$y_1=0.993103$；

$x_2=\frac{1}{6}$，$y_2=0.972973$；

$x_3=\frac{1}{4}$，$y_3=0.941176$；

$x_4=\frac{1}{3}$，$y_4=0.900000$；

$x_5=\frac{5}{12}$，$y_5=0.852071$；

$x_6=\frac{1}{2}$, $y_6=0.800000$;

$x_7=\frac{7}{12}$, $y_7=0.746114$;

$x_8=\frac{2}{3}$, $y_8=0.692308$;

$x_9=\frac{3}{4}$, $y_9=0.640000$;

$x_{10}=\frac{5}{6}$, $y_{10}=0.590164$;

$x_{11}=\frac{11}{12}$, $y_{11}=0.543396$;

$x_{12}=1$, $y_{12}=0.500000$.

最后得到

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\doteq\frac{1}{36}[(y_0+y_{12})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9+y_{11})+2(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]$$

$$=0.785398,$$

所以

$$\pi\doteq 0.785398\times 4=3.14159,$$

精确到0.00001.

2541. 计算

$$\int_0^1 e^{x^2}dx$$

精确到0.001。

解 采用辛普森公式计算，则其误差

$$R_n(x)=-\frac{1}{180n^4}2e^{\xi^2}(8\xi^4+24\xi^2+6)$$

$$(0<\xi<1),$$

故有 $|R_n(x)|<\frac{1}{180n^4}\cdot 2e\cdot 38$.

要$|R_n(x)|<10^{-3}$，只须$\frac{2\cdot 38\cdot e^1}{180\,n^4}<10^{-3}$，即只须取$n=6$.

现取 $n=6$，则有

$x_0=0$，$y_0=1$；

$x_1=\frac{1}{6}$，$y_1=e^{\frac{1}{36}}=1.0282$；

$x_2=\frac{1}{3}$，$y_2=e^{\frac{1}{9}}=1.1175$；

$x_3=\frac{1}{2}$，$y_3=e^{\frac{1}{4}}=1.2840$；

$x_4=\frac{2}{3}$，$y_4=e^{\frac{4}{9}}=1.5596$；

$x_5=\frac{5}{6}$，$y_5=e^{\frac{25}{36}}=2.0026$；

$x_6=1$，$y_6=e=2.7183$.

于是，

$$\int_0^1 e^{x^2}dx=\frac{1}{18}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)$$

$+2(y_2+y_4)] \doteq 1.463$.

2542. 计算

$$\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx \text{ 精确到} 10^{-4}.$$

解 对于函数$f(x)=e^x$在$0\leqslant x\leqslant 1$上采用台劳展式以及相应的拉格朗日余项公式来估算误差：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\Delta_{n+1},$$

其中

$$\Delta_{n+1}=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

于是，

$$|\Delta_{n+1}|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}x^{n+1},$$

从而原来的积分数值为

$$I=\int_0^1 (e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}dx+R_{n+1},$$

其中

$$|R_{n+1}|=\left|\int_0^1 \Delta_{n+1}\ln\frac{1}{x}dx\right|$$

$$\leqslant \frac{e}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}\ln\frac{1}{x}dx.$$

记 $I_k=\int_0^1 x^k\ln\frac{1}{x}$ ($k\geqslant 1$)，则有

$$I_k=\frac{1}{k+1}\int_0^1 \ln\frac{1}{x}d(x^{k+1})$$

$$=\frac{1}{k+1}x^{k+1}\ln\frac{1}{x}\Big|_0^1+\frac{1}{k+1}\int_0^1 x^k dx$$

$$=\frac{1}{(k+1)^2}.$$

如果取 $n=5$ ，则有

$$|R_6|\leqslant\frac{e}{6!}I_6=\frac{e}{6!}\cdot\frac{1}{7^2}=\frac{e}{7\times 7!}$$

$$=\frac{e}{35280}<\frac{3}{35280}<\frac{1}{1.1\times 10^4}<10^{-4}.$$

记 $I=J+R_6$，则有

$$J=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}I_k=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{(k+1)!\ (k+1)}$$

$$=\frac{1}{2!2}+\frac{1}{3!3}+\frac{1}{4!4}+\frac{1}{5!5}+\frac{1}{6!6}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{18}+\frac{1}{96}+\frac{1}{600}+\frac{1}{4320}$$

$$=0.31787^{+}=0.3179+\Delta',$$

其中$|\varDelta'|\leqslant 0.00004=4\times 10^{-5}$且$\varDelta'<0$。

注意到由$\varDelta_{n+1}>0$即可推知$R_{n+1}>0$，于是

$$I=J+R_6=0.3179+(R_6+\varDelta')$$

$$=0.3179+(R_6-|\varDelta'|)=0.3179+\varDelta,$$

且有$I\doteq 0.3179$，而此时其相应的误差已有

$$|\varDelta|=\Big|R_6-|\varDelta'|\Big|\leqslant\begin{cases}R_6, & 若|\varDelta'|\leqslant R_6,\\ |\varDelta'|, & 若|\varDelta'|>R_6\end{cases}$$

$$\leqslant\max(R_6,\ |\varDelta'|)<10^{-4}.$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值，因为被积函数$(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$的四阶导函数在$x=0$的右近旁是无界的，从而不能估计出误差。所以，上面我们用台劳公式来作近似计算。这样，计算以及估计误差都较为简单。当然，也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值，这时需要或者改变被积函数或者把积分区间分成两个。例如，我们可以改变被积函数如下：令

$$I=\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx=-\int_0^1(e^x-1)\ln x\,dx,$$

设$f(x)=(e^x-1)\ln x$，若补充定义

$$f(0)=\lim_{x\to+0}f(x)=0,$$

则$f(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数。由于

$$f'(x)=e^x\ln x+\frac{e^x-1}{x}$$

$$=f(x)+\frac{e^x-1}{x}+\ln x\quad(0<x\leqslant 1),$$

故

$$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx$$

$$+\int_0^1 \ln x dx.$$

注意到

$$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-f(0)=0,$$

$$\int_0^1 \ln x\, dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1=-1,$$

得

$$I=\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx-1.$$

于是，我们把求$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$的近似值问题，归结为求$\int_0^1\frac{e^x-1}{x}dx$的近似值问题。令$g(x)=\frac{e^x-1}{x}$，并补充定义

$$g(0)=\lim_{x\to+0}g(x)=1,$$

则$g(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数。由求高阶导数的莱布尼兹法则，易得

$$g^{(n)}(x)=\frac{e^xP_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}(0<x\leqslant 1),$$

其中$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k k!x^{n-k}\qquad(n=1,2,\cdots)$.

下面证明$g^{(n)}(0)$存在并且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$)。首先，由洛比塔法则，我们有

$$\lim_{x\to+0} g^{(n)}(x)=\lim_{x\to+0}\frac{e^x P_n(x)-(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{e^x[P_n(x)+P'_n(x)]}{(n+1)x^n}$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{e^x x^n}{(n+1)x^n}=\frac{1}{n+1}\ (n=1,2,\cdots).$$

于是，根据中值定理，得

$$g'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{\xi\to+0}g'(\xi)$$

$$=\frac{1}{2}\quad(0<\xi<x).$$

今假定$g^{(n)}(0)$存在且 $g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}$。于是，

$$g^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to+0}\frac{g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{\eta\to+0}g^{(n+1)}(\eta)=\frac{1}{n+2}(0<\eta<x).$$

根据数学归纳法，知$g^{(n)}(0)$存在且

$$g^{(n)}(0)=\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由此又知$g^{(n)}(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的连续函数($n=1, 2, \cdots$)。令$h(x)=e^xP_n(x)-(-1)^n n!$。由于

$$h'(x)=e^x[P_n(x)+P_n'(x)]=e^x x^n>0$$

$$(当\ 0<x\leqslant 1\ 时),$$

故 $h(x)$在$[0, 1]$上是严格增大的，从而

$$h(x)>h(0)=0\ (当\ 0<x\leqslant 1\ 时)。$$

因此，当$0<x\leqslant 1$时$g^{(n)}(x)>0$($n=1,2,\cdots$)，所以$g^{(n-1)}(x)$是$0\leqslant x\leqslant 1$上的严格增函数($n=1, 2, \cdots$)。特别，$g^{(4)}(x)$当然是$0\leqslant x\leqslant 1$上的严格增函数.于是，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，恒有

$$\frac{1}{5}=g^{(4)}(0)\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant g^{(4)}(1)。$$

由于当$0<x\leqslant 1$时，

$$g^{(4)}(x)=\frac{e^x(x^4-4x^3+12x^2-24x+24)-24}{x^5},$$

故$g^{(4)}(1)=9e-24<0.5$。因此，当$0\leqslant x\leqslant 1$时，

$$0.2\leqslant g^{(4)}(x)\leqslant 0.5。$$

代入辛普森公式的误差表达式，得

$$|R_n(x)|=\left|-\frac{g^{(4)}(\xi'')}{180\cdot n^4}\right|\leqslant\frac{1}{360n^4},$$

$$R_n(x)<0。$$

取$n=4$，有

$$|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{360n^4}<1.1\times 10^{-5}。$$

计算得

$$g(0)=1,\ g\left(\frac{1}{4}\right)=1.13610,\ g\left(\frac{1}{2}\right)=1.29744,$$

$$g\left(\frac{3}{4}\right)=1.48933,\ g(1)=1.71828.$$

于是，代入后最终得

$$I=\int_0^1 g(x)dx-1\doteq\frac{1}{12}\left\{g(0)+g(1)+2g\left(\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\left.+4\left[g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{4}\right)\right]\right\}-1$$

$$=1.3179-1=0.3179,$$

其误差的绝对值显然小于$0.0001=10^{-4}$。

也可不改变被积函数，而把积分区间分成两个，步骤如下：

$$令\ u=\frac{1-x}{x}\ (0<x<1),\quad 则\frac{1}{x}=1+u\ \ (u>0).$$

于是，当$0<x<1$时，有

$$0<(e^x-1)\ln\frac{1}{x}=(e^x-1)\ln(1+u)$$

$$<(e^x-1)u=\frac{1-x}{x}(e^x-1)<\frac{e^x-1}{x}.$$

前面已证函数$g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上是严格增大的（注意，规定$g(0)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$），故当 $0<x<1$时，有

$$1<\frac{e^x-1}{x}<g(1)=e-1<2;$$

从而

$$0<\int_0^{10^{-5}}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx<\int_0^{10^{-5}}\frac{e^x-1}{x}dx$$

$$<2\int_0^{10^{-5}}dx=0.2\times10^{-4}.$$

求出函数 $(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$ 的四阶导函数的表达式后，易知它在闭区间 $10^{-5}\leqslant x\leqslant 1$ 上是连续的，从而是有界的，并且不难估计出其绝对值的上界。因此，可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^{1}(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$$

的近似值，使误差的绝对值小于 0.8×10^{-4}. 显然，若以此作为积分 $\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}$ 的近似值，则其误差的绝对值小于 10^{-4}。由于计算较繁，从略。

2543. 近似地计算概率积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx.$$

解 作变换

$$x=\frac{t}{1-t},$$

则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt.$$

由于题中对精确度未提出明确要求，故 n 可任取。例如取 $n=2k=18$, $\Delta t=\frac{1}{18}$, 则有

$t_0=0$, $y_0=1$;

$t_1=\frac{1}{18}$, $4y_1=4.46894$;

$t_2=\frac{1}{9}$, $2y_2=2.49201$;

$t_3=\frac{1}{6}$, $4y_3=5.53415$;

$t_4=\frac{2}{9}$, $2y_4=3.04696$;

$t_5=\frac{5}{18}$, $4y_5=6.61414$;

$t_6=\frac{1}{3}$, $2y_6=3.50460$;

$t_7=\frac{7}{18}$, $4y_7=7.14411$;

$t_8=\frac{4}{9}$, $2y_8=3.41685$;

$t_9=\frac{1}{2}$, $4y_9=5.88607$;

$$t_{10}=\frac{5}{9},\ 2y_{10}=2.12232;$$

$$t_{11}=\frac{11}{18},\ 4y_{11}=2.23855;$$

$$t_{12}=\frac{2}{3},\ 2y_{12}=0.32968;$$

$$t_{13}=\frac{13}{18},\ 4y_{13}=0.06009;$$

$$t_{14}=\frac{7}{9},\ 2y_{14}=0.00010;$$

$$t_{15}=\frac{5}{6},\ 4y_{15}=0;$$

$$t_{16}=\frac{8}{9},\ 2y_{16}=0;$$

$$t_{17}=\frac{17}{18},\ 4y_{17}=0;$$

$$t_{18}=1,\ y_{18}=\lim_{t\to 1} e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)^2=0.$$

按辛普森公式，得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2}\frac{1}{(1-t)^2}dt$$

$$=\frac{1}{54}(1+4.46894+2.49201$$
$$+5.53415+3.04696+6.61414$$
$$+3.50460+7.14411+3.41685$$
$$+5.88607+2.12232+2.23855$$

$$+0.32968+0.06009+0.00010)$$

$$=\frac{47.85857}{54}\doteq 0.88627.$$

2544. 近似地求出半轴为$a=10$及$b=6$的椭圆的周长。

解 设椭圆的参数方程为

$$x=10\cos t,\quad y=6\sin t.$$

于是有$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=10\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$,

从而得椭圆的周长为

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}ds=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

现取$n=2k=6$近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt.$$

注意到 $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $\sin^2\frac{5\pi}{12}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$,

$h=\frac{\pi}{12}$, 即有

$$t_0=0,\quad y_0=1;$$

$$t_1=\frac{\pi}{12},\quad 4y_1=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2-\sqrt{3})}$$

$$=3.913;$$

$$t_2=\frac{\pi}{6},\quad 2y_2=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}}=1.833;$$

$t_3=\frac{\pi}{4}$， $4y_3=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{2}}=3.293$；

$t_4=\frac{\pi}{3}$， $2y_4=2\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{3}{4}}=1.442$；

$t_5=\frac{5\pi}{12}$， $4y_5=4\sqrt{1-\frac{16}{25}\cdot\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})}$

$=2.539$；

$t_6=\frac{\pi}{2}$，$y_6=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=0.6$。

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{h}{3}[(y_0+y_6)+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)]$$

$$=\frac{\pi}{36}(1+0.6+3.913+3.298+2.539+1.833+1.442)$$

$$\doteq 1.276,$$

所以，椭圆周长的近似值为

$$s=40\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{16}{25}\sin^2 t}\,dt$$

$$=40\times 1.276=51.04.$$

2545．取 $\Delta x=\frac{\pi}{3}$，按点子作出函数

$$y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt \quad (0\leqslant x\leqslant 2\pi)$$

的图形。

解 取$n=2k=6$计算函数 $y=\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 的值。

先计算 $y=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt$。由于$h=\frac{\pi}{18}$，且

$t_0=0$， $y_0=1$；

$t_1=\frac{\pi}{18}$， $4y_1=3.980$；

$t_2=\frac{\pi}{9}$， $2y_2=1.960$；

$t_3=\frac{\pi}{6}$， $4y_3=3.820$；

$t_4=\frac{2\pi}{9}$， $2y_4=1.841$；

$t_5=\frac{5\pi}{18}$， $4y_5=3.511$；

$t_6=\frac{\pi}{3}$， $y_6=0.827$。

按辛普森公式，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{54}(1+0.827+3.980+3.820+3.511+1.960+1.841)\doteq 0.99。$$

再计算 $y=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt$. 由于$h=\frac{\pi}{9}$，且

$t_0=0$，$y_0=1$；

$t_1=\frac{\pi}{9}$，$4y_1=3.919$；

$t_2=\frac{2\pi}{9}$，$2y_2=1.841$；

$t_3=\frac{\pi}{3}$，$4y_3=3.308$；

$t_4=\frac{4\pi}{9}$，$2y_4=1.411$；

$t_5=\frac{5\pi}{9}$，$4y_5=2.257$；

$t_6=\frac{2\pi}{3}$，$y_6=0.413$.

所以，

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{27}(1+0.413+3.919+3.308+2.257+1.841+1.411)\doteq 1.65.$$

选取适当的n，类似地可求得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.85;\qquad \int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.72;$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.52;\qquad \int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t}dt\doteq 1.42.$$

列表作图如下（图4.55）：

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

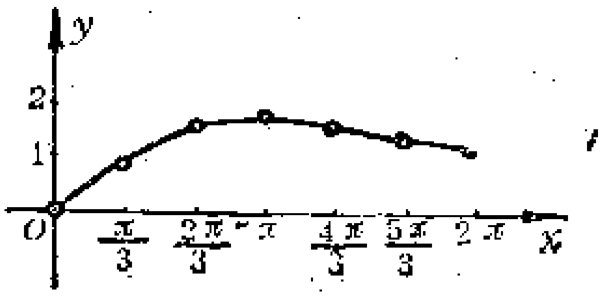

图 4.55